

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Stejnoseměrná stabilita elektrických obvodů

DOKTORSKÁ DIZERTAČNÍ PRÁCE

Obor: Elektronika, měřicí a sdělovací technika

Školitel: Prof. Ing. Kamil Vrba, Csc

Autor: Ing. Zdeněk Biolek

Rožnov p.R., leden 2001

PŘEDMLUVA

Předložená práce shrnuje podstatné výsledky mého podílu na výzkumu DC stability prováděného zpočátku vlastními silami, dále pak v období 1997-2000 na ÚTKO FEI VUT v Brně.

Prvotní impulsy k tomuto výzkumu vzešly z paradoxů vyskytujících se u DC nestabilních obvodů, se kterými jsem se setkával při analytických výpočtech i během své návrhářské praxe v polovodičovém průmyslu (viz část 2.2). Později se ukázalo, že problém, jak ohodnotit stabilitu zapojení, ve kterém není předem známo rozložení parazitních a jiných reaktancí, má nejen velmi zajímavé fyzikální pozadí, ale je aktuální také při návrhářské práci např. u analogových integrovaných obvodů. Potřeba řešit stabilitu takových obvodů vedla k úvahám o stejnosměrných mechanizmech, které v mnoha případech prokazatelně způsobují nestabilitu bez ohledu na rozložení reaktancí. Následně bylo zřejmé, že jádro problému je někde na pomezí termodynamiky a klasické dynamiky a že celá věc si zaslouží důkladné studium.

Cílem výzkumu se stalo vybudování teorie, která by definičně podchytila stabilitu stejnosměrného obvodu jako termodynamického systému a která by umožnila tuto stabilitu ohodnotit na základě řádného kritéria. Vztah mezi takto chápanou DC stabilitou a klasicky pojímanou stabilitou obvodu obohaceného o reaktance by vyplynul z existujícího vztahu mezi termodynamikou a klasickou dynamikou.

Děkuji prof. Kamilu Vrbovi z ÚTKO FEI VUT v Brně za odborné vedení a těsnou spolupráci, za materiální podporu a všestranné zabezpečení po celou dobu výzkumu. Práce byla také podporována grantovým projektem GAČR č. 102/98/0782 „Variační metody v teorii obvodů a jejich využití k testování stability“ řešeného na ÚTKO FEI v Brně. Děkuji také za podporu, které se mi dostalo prostřednictvím Grantu fondu VUT pro umění a vědu FU 470011 „Testování stability ss obvodů pomocí variačních metod“. Cennou pomocí byly pro mne pracovní rozhovory s prof. Jurajem Valsou z UTEE a prof. Jiřím Pospíšilem z UREL FEI VUT Brno.

Speciální poděkování patří mé ženě Vlastě, která vytvářela pro tuto práci spolehlivé zázemí.

*Ing. Zdeněk Biolek,
Rožnov p.R., leden 2001*

OBSAH

1	OBSAH PRÁCE	9
2	SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY	11
2.1	Přehled základních problémů	11
2.2	Paradox DC nestability	14
2.3	Greenova metoda	16
2.4	Metoda prof. Valsy	18
2.5	Metoda disipační funkce	19
2.6	Shrnutí	22
3	CÍL PRÁCE	23
4	ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ	25
4.1	Fyzikální pozadí současných metod	25
4.2	Metody analytické dynamiky	27
4.2.1	<i>Základní pojmy</i>	27
4.2.2	<i>Vektorový přístup</i>	28
4.2.3	<i>Skalární přístup</i>	30
4.3	Metody termodynamiky	36
4.3.1	<i>Základní pojmy</i>	36
4.3.2	<i>Termodynamické variační principy</i>	37
4.4	Vztahy mezi metodami	39
4.4.1	<i>Prolínání obou metod</i>	39
4.4.2	<i>Rovnováha obou typů sil</i>	39
4.5	Vznik práce a postup výkladu	41
5	HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE	42
5.1	Imitanční kritérium	42
5.1.1	<i>Základní představy</i>	42
5.1.2	<i>Odvození imitančního kritéria</i>	48
5.1.3	<i>Stejnoseměrné důsledky kritéria</i>	50
5.1.4	<i>Aplikace</i>	50
5.1.5	<i>Frekvenční představy o DC stabilitě</i>	62

5.2	Termodynamické kritérium	63
5.2.1	Základní představy	63
5.2.2	Odvození kritéria	65
5.2.3	Výběr zdrojů fluktuací	69
5.2.4	Ilustrativní příklad	74
5.2.5	Obecné kritérium	76
5.2.6	Aplikace	77
5.2.7	Obvody s DC vazbami	80
5.2.8	DC principy v nelineárních obvodech	92
5.2.9	Zobrazování virtuálních trajektorií	95
6	ZÁVĚR	104
7	LITERATURA	107
	PŘÍLOHA A	111
	PŘÍLOHA B	112
	PŘÍLOHA C	113

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

A	zesílení ideálního zesilovače napětí, práce
A_u	napěťové zesílení obvodu
\underline{A}	stavová matice, matice koeficientů řízených zdrojů
$()^A$	operátor akce
\underline{B}	matice zobecněných odporů
c	konstanta úměrnosti mezi virtuální příčinou a následkem
C	kapacita, počet komplexních pólů
\underline{C}	matice úměrnosti mezi virtuální příčinou a následkem, kapacitní matice
\underline{D}	matice zobecněných tuhostí, matice inverzních kapacit
$\delta()$	operátor variace
E	energie
F	síla
ε	energie, účinek
$\varepsilon_i, \varepsilon_j$	termodynamické reciproční koeficienty
$\varepsilon_p, \varepsilon_q$	činná a jalová složka přenášené energie
f	frekvence
$f()$	operátor vazební podmínky, funkce vazebních podmínek
\tilde{f}	integrační proměnná pro sílu, vektor vazebních podmínek
\vec{F}	vektor síly
\underline{F}	matice vazebních podmínek
${}^k \underline{F}$	váhová matice vazebních podmínek
$\Phi()$	operátor disipačního potenciálu
$\Psi()$	operátor disipačního potenciálu
\underline{G}	vodivostní matice
G_{ij}, g_{ij}	člen vodivostní matice
$g(t)$	impulsní funkce
G	admitance
Γ	Greenova konstanta, trajektorie
\underline{H}	hybridní virtuální matice
\underline{I}	jednotková matice
\vec{I}	vektor elektrického proudu, inerční síla
j	imaginární jednotka
$J(t)$	tok entropie
\vec{J}	transformovaný proudový vektor
K_i	váhový reciproční koeficient
L	indukčnost, počet záporných pólů
\underline{L}	indukčnostní matice

$L()$	operátor Lagrangeovy funkce
$L^*()$	operátor modifikované Lagrangeovy funkce
λ	magnetický tok, Lagrangeův neurčitý multiplikátor, vlastní číslo
$\vec{\lambda}$	vektor magnetických toků, vektor Lagrangeových neurčitých multiplikátorů
$\underline{\Lambda}$	lambda-matice
\underline{M}	hmotnostní matice
n	nulový bod
N	počet nulových bodů v oblasti
\bar{v}	integrační proměnná pro napětí
Θ	uzavřená oblast komplexní roviny
p	impuls, Laplaceův operátor, pól obvodu
P	počet pólů v oblasti
P_i, P_u	počet proudových a napěťových zdrojů v obvodu
$P(t)$	produkce entropie
\bar{p}	vektor impulsu
\bar{P}	integrační proměnná pro impuls
\underline{P}	matice podobnostní nebo kongruentní transformace
\underline{Q}	tepelná energie
\bar{Q}	integrační proměnná pro náboj
\underline{Q}	hybridní matice v Greenově metodě
q	elektrický náboj, souřadnice polohy
\vec{q}	vektor elektrického náboje, vektor souřadnice polohy
R	odpor, počet kladných pólů
\underline{R}	odporová matice
$()^R$	operátor reakce
$\Re(), \Re'()$	operátor disipační funkce, kofunkce
s	parametr křivky
S	entropie
σ	integrační proměnná pro napětí
t, t_0, t_1	čas (počáteční, konečný)
T	absolutní teplota
T_d	dopravní zpoždění
$T(), T'()$	operátor kinetické energie, koenergie
$()^T$	operátor transpozice vektoru či matice
U^o, U^e, U^c	třídy (ne)stability
u	elektrické napětí
U	elektrické napětí, vnitřní energie systému
\vec{U}	vektor elektrického napětí
\vec{V}	transformovaný napěťový vektor
$V(), V'()$	operátor potenciální energie, koenergie

W_e, W_m	energie elektrického pole, energie magnetického pole
w^e	práce efektivních sil
ω	úhlový kmitočet
$\Delta\omega$	šířka frekvenčního pásma
Ω	kmitočet, integrační proměnná pro kmitočet
ξ	koeficient tlumení
x	souřadnice polohy
\bar{x}	obecná příčina, stavový vektor
y	souřadnice polohy
\bar{y}	obecný následek
Z	impedance

1 OBSAH PRÁCE

V práci se řeší problematika tzv. stejnosměrné neboli DC stability analogových obvodů.

Při hodnocení stability skutečného elektrického obvodu vycházíme vždy z víceméně nedokonalého modelu, ve kterém zákonitě bude chybět podrobná informace o rozložení všech parazitních indukčností a kapacit. Pokud však tyto vlivy do modelu nezahrneme, můžeme dojít ke zcela nesprávnému závěru ohledně stability zapojení. Z praxe známe případy, kdy se zapojení rozkmitá nebo naopak stabilizuje právě vlivem parazitních reaktancí.

Existuje však také třída obvodů, u kterých se hranice mezi nestabilitou a stabilitou nedá překonávat pomocí frekvenční kompenzace. Jsou to případy, kdy o stabilitě či nestabilitě rozhoduje způsob provedení *stejnosměrných* vazeb, jak je tomu např. u klopných obvodů, komparátorů nebo také u nevhodně navržených obvodů. Mluvíme o stejnosměrné neboli DC (ne)stabilitě jako o (ne)schopnosti obvodu vyrovnat se s nekonečně pomalými odchylkami od rovnovážného bodu.

Zatímco v případě frekvenční kompenzace mohou o stabilitě rozhodnout energetické poměry na některých frekvencích, u tzv. DC nestabilních obvodů je situace úplně jiná. Jak vyplynulo z výzkumů provedených v této práci, nedá se DC nestabilita frekvenčně kompenzovat v rámci obvodů s minimální fází.

Práce se nejprve věnuje definičním otázkám, tj. vymezuje pojmy DC obvodu a DC stability.

Prakticky každý obvod s polovodičovými prvky má nějaké DC nestabilní rovnovážné body. Tyto body mohou být v praxi zdrojem nepříjemností. Předpokládejme, že okamžitý stav systému lze znázornit jako zastupující bod v příslušném stavovém prostoru. Všechny možné trajektorie nebuzeného systému, po kterých se tento bod může pohybovat, povedou od DC nestabilních bodů směrem k bodům stabilním. DC nestabilní body se tak významným způsobem podílejí na celkové dynamice systému. Hojně se vyskytují v nelineárních obvodech a často bývají příčinou nespolehlivé funkce různých zapojení. Po připojení obvodu k napájecímu napětí mohou tyto body působit jako překážky pro řádný náběh do pracovního bodu, proto bývá v takových případech nutné opatřit zapojení startovacím obvodem. Během provozu se dále může zastupující bod systému vlivem DC nestabilních bodů dostat na trajektorii nasměrovanou do nežádoucího směru a skončit ve stavu, kdy je zařízení zcela nefunkční.

DC nestabilní body jsou také nepozorovatelné a o jejich existenci nemusíme mít ani tušení. Dají se jako každý jiný rovnovážný bod zjistit řešením algebraických rovnic DC obvodu, avšak všeobecně přijímaná metoda na identifikaci DC nestability dosud neexistuje. Ljapunovova metoda linearizace kolem DC nestabilního bodu totiž dává správné výsledky pouze tehdy, jsou-li dodržena pravidla správného modelování s ohledem na konečnou šířku pásma přenášených signálů. V obvodech s nejrůznějšími typy řízených zdrojů může být docela velkým problémem tuto

podmínku systematicky zajišťovat. Porušení těchto zásad obvykle vede k obtížně vysvětlitelným paradoxům (viz oddíl 2.2).

Jak vyplynulo z dalšího výzkumu, informace o DC (ne)stabilitě je plně obsažena již v rezistivní části obvodu a nezávisí na rozložení reaktančních prvků. Otázkou ovšem je, jak tuto informaci získat. Vzhledem k předchozím úvahám je zřejmé, že v kritériu pro DC (ne)stabilitu budou figurovat pouze DC parametry zapojení, reaktanční parametry ani čas zde nehrají žádnou roli. Obvod bez reaktancí se však nedá popsat diferenciálními rovnicemi, ty se redukují na rovnice algebraické. Ztrácíme rozměr času, na kterém je založena definičně i metodicky klasická teorie stability.

Práce je dále zaměřena na překonání těchto problémů s absencí času a na formulaci kritérií DC (ne)stability. Přitom se sledují dvě cesty: jedna vychází z klasické dynamiky elektrických obvodů a vede k tzv. imitančnímu kritériu stability. Druhá cesta zůstává v rovině termodynamiky a dává podmínku pro DC (ne)stabilitu v algebraickém tvaru.

Imitanční kritérium ukazuje, jak souvisí DC stabilita se stabilitou klasickou. Je imitanční obdobou Nyquistova kritéria [34]. Dá se s výhodou použít pro sledování stability pomocí počítačových simulačních programů.

Algebraické kritérium DC (ne)stability vychází z termodynamické podstaty DC obvodu a spočívá ve vyhledávání vlastních čísel tzv. virtuální matice. Toto kritérium je duální k hojně používané metodě charakteristických čísel.

Součástí práce je také metoda, jak do imitanční matice zakomponovat nejružnější makroobvody zanášející mezi obvodové veličiny algebraické vazby. Využívá se zde metody Lagrangeových neurčitých multiplikátorů známé z analytické dynamiky.

Teorie je doložena na několika příkladech z praxe.

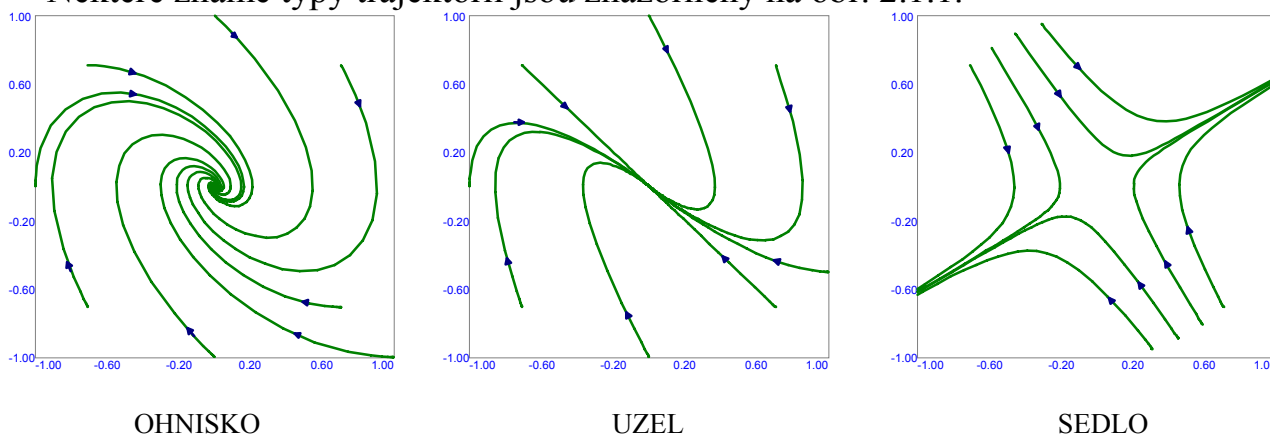
2 SOUČASNÝ STAV ŘEŠENÉ PROBLEMATIKY

2.1 Přehled základních problémů

Při počítačové analýze elektrických obvodů je velmi častou úlohou výpočet stejnosměrného pracovního bodu. Postupuje se tak, že se rozpojí všechny kapacitory a zkratují induktory a řeší se algebraické rovnice takto zjednodušeného obvodu. Zapojení může mít za daných podmínek i více možných stejnosměrných pracovních bodů, z nichž některé jsou nestabilní. Pro tyto nestabilní pracovní body nemá smysl pokračovat např. ve frekvenční analýze. Identifikace těchto nestabilních bodů je však v současné době vážným problémem. Potíže vznikají po linearizaci obvodu kolem DC nestabilního rovnovážného bodu.

Podle klasického pojetí je stabilita rovnovážného bodu chápána jako jeho schopnost „přitahovat“ k sobě body pohybující se po blízkých trajektoriích. Tvar trajektorie je dán relací mezi okamžitou odchylkou od tohoto bodu \vec{x} a okamžitou rychlostí odpuzování $\dot{\vec{x}}$. Pro zjišťování typu trajektorie se běžně používá metody vypracované původně Ljapunovem, která je založena na metodě vlastních čísel stavové matice \underline{A} linearizovaného modelu. Stavová rovnice obvodu bez buzení je ve tvaru $\dot{\vec{x}} = \underline{A} \cdot \vec{x}$. O chování trajektorie v blízkosti rovnovážného bodu a tedy i o stabilitě rozhoduje poloha vlastních čísel stavové matice v komplexní rovině. Pro (ne)stabilitu daného rovnovážného stavu přidruženého nelineárního systému je nutné a postačující, aby všechna vlastní čísla matice \underline{A} ležela v levé (pravé) komplexní polorovině (viz část 5.2.8).

Některé známé typy trajektorií jsou znázorněny na obr. 2.1.1.



Obr. 2.1.1: Některé typy trajektorií

Chceme-li použít těchto klasických postupů k testu stability rovnovážného bodu „podezřelého“ na DC nestabilitu, musíme v průběhu modelování bezpodmínečně zajistit konečnou šířku frekvenčního pásma těch částí obvodu, které jsou zapojeny do „nebezpečných“ zpětnovazebních smyček. Pokud to neuděláme, dojde ke vzniku paradoxů, které nám zcela znehodnotí další analýzu. Tomuto jevu se ještě budeme věnovat v oddílu 2.2 (viz také [21]).

Nebezpečí vzniku paradoxů nás nutí používat k identifikaci DC nestabilních bodů co nejdokonalejších modelů. V praxi totiž bývá obtížné zjišťovat, kde se nacházejí ony „nebezpečné“ zpětnovazební smyčky a jakým způsobem respektovat omezenou šířku pásma kritických částí obvodu, takže je zde tendence model v tomto směru raději předimenzovat. Za tím účelem se obvykle do vybraných míst obvodu vkládají přídavné reaktance.

V dnes již klasických publikacích Greena a Wilsona [1], [2], kde se o přídavných reaktancích hovoří, není způsob jejich doplnění konkretizován. V [5] jsou parazitní kapacity doplňovány mezi každý uzel a zem a parazitní indukčnosti do série s každým rezistorem. V [1], [6] a [7] se pouze hovoří o "parasitic shunt capacitors and series inductors". V [9] se přikládají kapacity k vybraným uzlům a vkládají se indukčnosti do vybraných větví.

Tento poměrně nevýhodný postup navíc v sobě skrývá rozpor: abychom bezpečně odhalili DC nestabilitu, na kterou nemají frekvenčně závislé prvky žádný vliv, jsme nuceni rozšířit model právě o tyto prvky. Logicky pak vzniká otázka, zda by nebylo lepší se těchto prvků zbavit úplně a informaci o DC stabilitě zjišťovat přímo z obvodu bez reaktancí.

Zde se ovšem objevuje nový problém: jak takovou stabilitu definovat? Není totiž zřejmé, jak definovat stabilitu obvodu bez reaktančních prvků, tj. obvodu bez vlastní dynamiky. Všechna dosud známá kritéria stability kalkulují s časovým vývojem trajektorie systému vychýleného z rovnovážného bodu. Takových kritérií nelze v našem případě použít.

Ve způsobech definic (ne)stability se objevují značně rozdílné přístupy. Někteří autoři nerozlišují mezi pojmy "pracovní bod" (operating point) a "rovnovážný bod" (equilibrium point). Důsledné rozlišení je uvedeno v [1]: rovnovážný bod se týká obecného dynamického systému, pracovní bod popisuje stav přidruženého DC obvodu. V [5] se místo o pracovním bodu hovoří o "dc circuit's equilibrium point" nebo "resistive circuit's equilibrium point".

V literatuře se objevují v souvislosti se stabilitou jak pracovního, tak i rovnovážného bodu tyto pojmy (některé české ekvivalenty anglických pojmů je třeba považovat za pracovní):

- stabilní rovnovážný bod a nestabilní rovnovážný bod [5] (všeobecně přijímaná definice),
- potenciálně stabilní (potentially stable) pracovní bod a nestabilní pracovní bod [1],
- strukturálně stabilní (structurally stable) rovnovážný bod a nestabilní rovnovážný bod [6],
- totálně stabilní (totally stable) pracovní bod [5],
- nestabilní pracovní bod k-tého řádu typu "sedlo" (k-th order saddle-node unstable) [5]
- příležitostně nestabilní pracovní bod (occasionally unstable) [5].
- stabilní, nestabilní a podmíněně stabilní (conditionally stable) pracovní bod [4].

Ve všech případech je test stability prováděn nad linearizovaným modelem nelineárního obvodu v okolí vyšetřovaného pracovního bodu.

Definice stabilního rovnovážného bodu a nestabilního rovnovážného bodu [5]:

Rovnovážný bod x^* je stabilní, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\delta < \varepsilon$ a současně

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

pro všechny $t \geq t_0$ když

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta.$$

Jinak je rovnovážný bod nestabilní.

Definice potenciální stability a nestability pracovního bodu [1]:

Pracovní bod je potenciálně stabilní, jestliže po rozšíření linearizovaného rezistivního obvodu o množinu kapacitorů (shunt capacitors) o kapacitě $C > 0$ a sériových induktorů (series inductors) o indukčnosti $L > 0$ bude rovnovážný bod odpovídajícího dynamického obvodu stabilní, a jestliže rovnovážný bod každého dynamického obvodu vzniklého rozšiřováním tohoto obvodu o další libovolné kapacitory a sériové indukty, jejichž kapacita $C > 0$ a indukčnost $L > 0$ jsou dostatečně malé, je rovněž stabilní.

Pracovní bod, který není potenciálně stabilní, je nestabilní.

Definice strukturálně stabilního (structurally stable) rovnovážného bodu a nestabilního rovnovážného bodu [6]:

Rovnovážný bod je strukturálně stabilní, jestliže rovnovážný bod libovolného dynamického obvodu vytvořeného doplněním linearizovaného dynamického obvodu o libovolnou množinu parazitních kapacitorů (shunt capacitors) a sériových induktorů (series inductors) je stabilní.

Jinak je rovnovážný bod nestabilní vlivem působení parazitních reaktancí.

Definice totálně stabilního (totally stable) pracovního bodu [5]:

Pracovní bod je totálně stabilní, jestliže rovnovážný bod libovolného dynamického obvodu vytvořeného z rezistivního obvodu přidáním libovolné množiny parazitních kapacitorů mezi každý uzel a zem a induktorů do série s každým rezistorem je stabilní.

Definice nestabilního pracovního bodu k-tého řádu typu "sedlo" (k-th order saddle-node unstable) [5]:

Pracovní bod rezistivního obvodu je nestabilní bod k -tého řádu typu "sedlo", jestliže charakteristická rovnice získaná z variačního (variational) dynamického obvodu má k kladných reálných kořenů.

Variační dynamický obvod je definován v [5].

Definice příležitostně nestabilního pracovního bodu (occasionally unstable) [5]:

Pracovní bod rezistivního obvodu je příležitostně nestabilní, jestliže variační (variational) dynamický obvod je nestabilní jen pro některé množiny parazitních kapacitorů a induktorů a je stabilní pro některé jiné parazitní prvky.

Definice stabilního, nestabilního a podmíněně stabilního (conditionally stable) pracovního bodu [4]:

Pracovní bod je stabilní, jestliže jeho rozšířením o libovolnou množinu reaktančních prvků o kapacitě $C > 0$ a indukčnosti $L > 0$ vznikne dynamický obvod, jehož rovnovážný bod je stabilní.

Pracovní bod je nestabilní, jestliže jeho rozšířením o libovolnou množinu reaktančních prvků o kapacitě $C > 0$ a indukčnosti $L > 0$ vznikne dynamický obvod, jehož rovnovážný bod je vždy nestabilní.

Pracovní bod je podmíněně stabilní, jestliže jeho rozšiřováním o reaktanční prvky o kapacitě $C > 0$ a indukčnosti $L > 0$ mohou vzniknout dynamické obvody jak se stabilními tak i nestabilními rovnovážnými body.

Z uvedeného je zřejmé, že některé zdánlivě různé pohledy na stabilitu mají řadu společných prvků. Tyto společné rysy budou diskutovány v oddílu 2.6.

Problém s identifikací DC nestability je palčivý zejména při některých návrzích v oblasti analogových IO. Jak uvidíme později, v tranzistorových integrovaných strukturách se obvykle vyskytuje mnoho DC nestabilních bodů. Protože tyto body „odpužují trajektorii“, některé z nich mohou bránit normálnímu náběhu do pracovního bodu, takže bývá nutné přidávat na čip startovací obvody. DC nestabilní bod může také způsobit, že při určité souhře vnějších podmínek trajektorie „zabloudí“ do nesprávného pracovního bodu, ze kterého již nemusí být návratu.

Není bez zajímavosti, že problému DC stability se začali systematicky věnovat lidé, kteří navrhovali analogové IO. Jedním z nich je M.M.Green, který pracoval u firmy National Semiconductors (viz [23]).

V dalším textu bude uveden příklad paradoxu vzniklého nesprávným modelováním. Seznámíme se také se základními přístupy k DC stabilitě, které vyplývají z dnes už klasických prací M.M.Greena a některých jiných autorů.

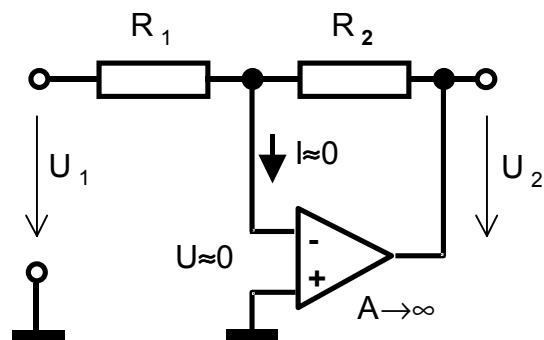
2.2 Paradox DC nestability

Těžkosti mohou nastat např. v praxi již u analýzy triviálních obvodů s operačními zesilovači (viz [24]). Po definování základních vlastností OZ (vysoké zesílení, velký vstupní a malý výstupní odpor) se přistoupí k odvození napěťových přenosů základních zapojení s OZ. Postup při odvozování zesílení invertujícího zapojení (viz obr. 2.2.1) je následující: Z velkého zesílení OZ se usuzuje, že $U \approx 0$ (virtuální zem). Pak za předpokladu $I \approx 0$ platí

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0,$$

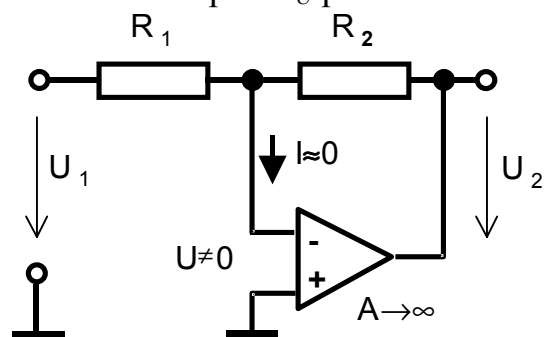
z čehož plyne

$$U_2 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_1. \quad (2.1)$$



Obr. 2.2.1: K odvození DC přenosu invertujícího zapojení OZ

Ke stejnému výsledku lze dospět také v případě, kdy se mezi sebou zamění invertující a neinvertující vstup OZ. Dochází pak k paradoxu, že i když se obvod stal vlivem kladné zpětné vazby nestabilním (je z něho komparátor), stále vychází konečné záporné zesílení (2.1). Zmatek ještě vzroste, když se pokusíme libovolnou metodou odvodit napěťové zesílení stupně A_U pro obecné zesílení A (viz obr. 2.2.2):



Obr. 2.2.2: K odvození DC přenosu zapojení s napěťovým zesilovačem

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A}{1 + \frac{R_1}{R_2} \cdot (1 + A)}. \quad (2.2)$$

Pro velmi vysoké zesílení (jak kladné, tak i záporné) vyjde paradoxní výsledek

$$\lim_{A \rightarrow \pm\infty} A_U = -\frac{R_2}{R_1}.$$

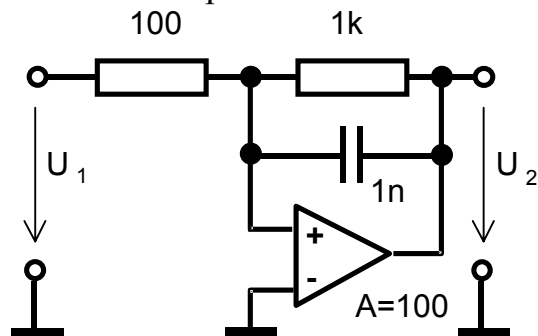
Vypadá to, jako kdyby napěťové zesílení nebylo závislé na tom, zda mezi sebou vyměníme nebo nevyměníme oba vstupy OZ. Rovnici (2.2) přitom obdržíme libovolnou metodou, která vychází z Ohmova zákona a ze zákonů Kirchhoffových. Je přitom zcela evidentní, že pro určitá zesílení A dává rovnice chybné výsledky, neboť obvod je při nich nestabilní.

Bližší zkoumání problému ukazuje, že výsledek je směřodatný jen v tom případě, je-li obvod daných parametrů skutečně stabilní. Potíž je v tom, že nám chybí kritérium pro posouzení takového stejnosměrné stability. Dokonce neexistuje jednotný náhled na to, co vlastně pod pojmem „stabilita stejnosměrného pracovního bodu“ rozumět.

Další problémy mohou vzniknout při analýze obvodů podle obr. 2.2.3. Pokud sestavíme frekvenční přenos obvodu a charakteristickou rovnicí, zjistíme, že kořen charakteristické rovnice (pól obvodu) je záporný a má hodnotu

$$p \doteq -8,99 \cdot 10^5 s^{-1}.$$

Podle všech kritérií stability to znamená, že zapojení je stabilní. Opak je však pravdou. Obvod je kvůli silné kladné zpětné vazbě nestabilní.



Obr. 2.2.3: Obvod pro test metodou pólů

Oba paradoxy mají některé rysy společné. K paradoxním výsledkům jsme dospěli zcela legálním postupem za použití metod, které vycházejí z obecně platných zákonů. Kirchhoffovy zákony a zákon Ohmův jsou základními pilíři stejnosměrné analýzy. Metoda pólů je zase неотředitelným základem téměř všech kritérií stability dynamických systémů. Ve výše uvedených příkladech jsou však výsledky správné jedině tehdy, jsou-li zkoumané systémy skutečně stabilní. Stane-li se systém pro určitou konfiguraci parametrů nestabilním, stávají se i výsledky získané uznávanými metodami „bez varování“ nesmyslnými.

Tyto paradoxy vznikají nesprávným modelováním. Napěťový zesilovač na obr. 2.2.3 zesiluje 100x signály na *všech* frekvencích a zjevně porušuje zákon o zachování energie. Omezíme-li jeho šířku pásma zavedením libovolně vysokého kmitočtu zlomu, objeví se ve výsledcích kromě záporného pólu i pól kladný, který neomylně ukazuje na pravý stav věci.

Zásadu, že komponenty ve zpětnovazebních smyčkách by měly mít omezenou šířku pásma, nacházíme jako základní předpoklad úspěšné analýzy již u Nyquista (viz [34]). V tomto triviálním případě bylo snadné „nebezpečnou“ smyčku zpětné vazby objevit a zjednat nápravu. Avšak v řadě případů, kdy pracujeme se složitě propojenými řízenými zdroji a makroobvody, je to obecně těžko proveditelné.

2.3 Greenova metoda

M.M.Green a A.N.Wilson v [1] navrhli definici tzv. potenciální stability stejnosměrného pracovního bodu. Na základě této definice autoři vypracovali algoritmus pro identifikaci nestabilních pracovních bodů a začlenili jej do jedné z verzí simulačního programu SPICE. Následuje definice tzv. potenciální stability převzatá z [1]:

Definice 2.1: Stejnosměrný (DC) pracovní bod je *potenciálně stabilní*, pokud jsou splněny tyto podmínky:

- po doplnění obvodu o některou množinu sériových induktorů s kladnou indukčností a paralelních kapacitorů s kladnou kapacitou bude odpovídající rovnovážný stav výsledného dynamického systému stabilní,
- rovnovážný stav každého dynamického systému vzniklého doplněním tohoto systému o libovolnou množinu sériových induktorů s dostatečně malou kladnou indukčností a paralelních kapacitorů s dostatečně malou kladnou kapacitou je také stabilní.

Definice 2.2: Pracovní bod, který není potenciálně stabilní, je *nestabilní*.

V [1] je také uvedeno kritérium pro identifikaci některých nestabilních bodů. Použití kritéria předpokládá obvod linearizovaný kolem zkoumaného pracovního bodu a rozložený na pozitivní rezistory a řízené zdroje. Mezi obvodové veličiny patří stavový vektor \bar{x} , který zahrnuje napětí na všech řízených zdrojích proudu a proudy přes všechny řízené zdroje napětí; vektor \bar{y} je jeho dvojbranovým doplňkem. Matice \underline{A} obsahuje koeficienty řízených zdrojů, takže platí $\bar{y} = \underline{A} \cdot \bar{x}$. Oba vektory jsou mezi sebou vázány také prostředím rezistivní části obvodu, což se projeví rovnicí $\bar{y} = \underline{Q} \cdot \bar{x}$, kde \underline{Q} je jistá hybridní matice. Nyní se definuje konstanta $\Gamma = \det(\underline{Q} \cdot \underline{A} + \underline{I})$, kde \underline{I} je jednotková matice. Kritérium pak zní takto:

Věta 2.1: Pracovní bod, pro který platí $\Gamma < 0$, je *nestabilní*.

Za nestabilní pracovní bod se tedy označuje takový pracovní bod, který není potenciálně stabilní, tj. ve smyslu definice nelze stejnosměrný obvod doplnit reaktančními prvky tak, aby byl odpovídající rovnovážný bod doplněného obvodu stabilní podle obecně přijímaných kritérií stability. Jinak řečeno, stejnosměrný obvod nestabilní podle Greena nelze stabilizovat přidáním reaktančních prvků do původního obvodu, protože nestabilita už není věcí klasické dynamiky. Je to druh nestability, pro kterou si teorie obvodů teprve buduje pojmový aparát.

Kritérium však dává pouze postačující podmínku pro nestabilitu. Vysvětlení je snadné, uvědomíme-li si, jak souvisí konstanta Γ s charakteristickým polynomem linearizovaného modelu. Je rovna absolutnímu členu, takže charakteristická rovnice bude

$$a_n p^n + \dots + a_1 p + \Gamma = 0.$$

Pak tedy

$$\frac{\Gamma}{a_n} = \prod_{r=1}^R (-p_r) \cdot \prod_{l=1}^L (-p_l) \cdot \prod_{c=1}^C (-p_c),$$

kde R , L a C jsou počty kladných (p_r), záporných (p_e) a komplexních (p_c) pólů.

Jelikož vždy platí $\prod_{l=1}^L (-p_l) > 0$ a $\prod_{c=1}^C (-p_c) > 0$, vychází

$$\text{sign} \Gamma = (-1)^R. \quad (2.3)$$

Z tohoto vztahu plyne, že Γ -kritérium neodhalí nestabilitu způsobenou komplexně sdruženými póly v kladné polorovině. Nepromítne se do něj ani *sudý* počet kladných reálných kořenů, pouze *lichý* počet.

Na základě těchto zjištění autoři v [2] rozlišují nestabilní body třídy U^o a U^e podle toho, zda obvod rozšířený o reaktance obsahuje lichý (*odd*) nebo sudý (*even*) počet kladných reálných pólů. Γ - kritérium pak odhaluje pouze nestabilitu typu U^o . Je neúčinné v případě bodů U^e , příp. U^c , kdybychom tak značili nestabilní body pro případ *komplexních* kořenů v pravé polovině.

V práci [2] nalezneme také zajímavé věty o tom, jaké typy nestabilních bodů vzniknou sloučením podobvodů, z nichž každý má své vlastní nestabilní body. Na základě teorie míry je definován pojem *strukturálně stabilního bodu* a dochází se ke zjištění, že těchto bodů je v běžně se vyskytujících případech lichý počet. Je odvozen teorém, který říká, že z n těchto bodů musí být $\frac{n-1}{2}$ nestabilních typu U^o .

Zdá se, že oba autoři považují Γ - kritérium za dostatečný základ pro objevování nových zákonitostí platných ve stejnosměrných obvodech. Tomu také odpovídá rozlišování mezi U^o a U^e nestabilními body, přičemž není jisté, zda toto dělení odráží nějaké hlubší fyzikální zákonitosti. Kritérium je postaveno tak, že na „potenciální“ stabilitu se usuzuje z klasicky pojímané stability obvodu rozšířeného o reaktance. Nepokouší se tedy odhalit nějakou hlubší podstatu DC (ne)stability. Pokud jde o způsob, jakým je získávána konstanta Γ , je v [3] uvedeno, že ji můžeme odvodit mnohem jednodušším způsobem jako determinant systémové matice vyplývající z velmi dobře známých popisů obvodu jako je např. modifikovaná metoda uzlových napětí.

2.4 Metoda prof. Valsy

Předpokládá se, že jsou nalezeny všechny pracovní body obvodu složeného z rezistorů a řízených zdrojů a že chceme vyšetřit jejich stabilitu. Kombinují se dvě metody:

Metoda Greena a Wilsona [1] – dovoluje vypočítat konstantu Γ . Přebírají se také beze změny pojmy *potenciálně stabilního* a *nestabilního* bodu podle *Definice 2.1* a *Definice 2.2*.

Metoda záporných odporů [4] – dovoluje vypočítat konstantu R . Zjišťují se znaménka odporů mezi všemi dvojicemi uzlů a ve všech větvích obvodu. Výsledkem je hodnota R , která je kladná, pokud všechny odpory byly kladné, a záporná, když alespoň jeden z odporů byl záporný. Pracovní bod je tzv. *potenciálně nestabilní*, je-li $R < 0$. Stabilita či nestabilita závisí na konkrétním rozložení kapacit a indukčností v obvodu.

Kombinovaná metoda – na základě konstant Γ a R se o stabilitě usuzuje podle následující věty:

Věta 2.2: Necht' jsou u obvodu modelovaného podle předpokladů Greenovy metody a metody záporných odporů zjištěny konstanty Γ a R . Pak platí:

Je-li $\Gamma > 0$ a současně $R > 0$, je pracovní bod *vždy stabilní*.

Je-li $\Gamma < 0$ a současně $R < 0$, je pracovní bod *vždy nestabilní*.

Je-li $\Gamma > 0$ a současně $R < 0$, je *stabilita závislá* na konkrétních hodnotách kapacit a indukčností.

Kombinace $\Gamma < 0$ a současně $R > 0$ je principiálně nemožná.

Praktické provedení metody záporných odporů je velmi efektivní, neboť je založeno na modifikované metodě uzlových napětí. Jednotlivé odpory se zjišťují jednoduchými operacemi nad systémovou maticí.

Metoda záporných odporů má slibné fyzikální pozadí, které dává základ pro energetický výklad DC stability.

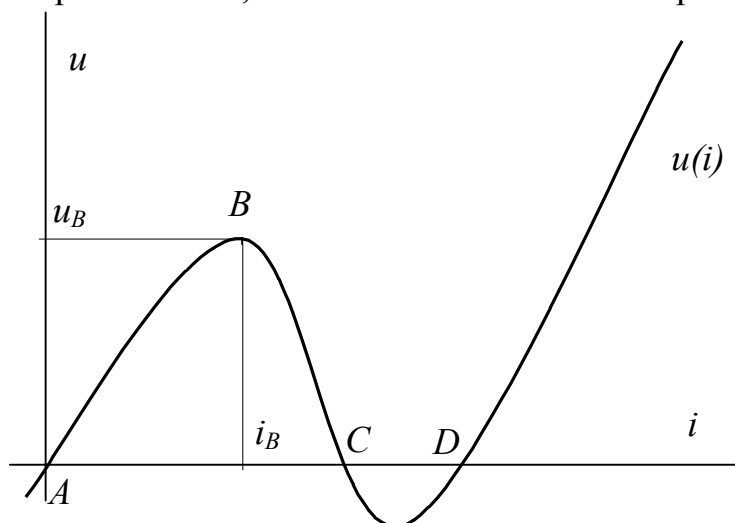
2.5 Metoda disipační funkce

Tato metoda umožňuje vyhledat rovnovážné body jako stacionární body tzv. disipační funkce. O stabilitě či nestabilitě rozhoduje typ stacionárního bodu. Lokálnímu minimu odpovídá stabilní bod, ostatní body jsou nestabilní (viz [9]).

Disipační funkce je typ potenciálové funkce, která popisuje výkonovou ztrátu na rezistivní části obvodu. Disipační *funkce* nelineárního jednobranu, jehož statickou charakteristiku je možno popsat rovnicí $u = u(i)$, je definována jako $\mathfrak{R}(i) = \int_{i_0}^i u(j) \cdot dj$,

kde $u(i_0) \cdot i_0 = 0$. Disipační *kofunkce* nelineárního jednobranu, jehož statickou charakteristiku je možno popsat rovnicí $i = i(u)$, je definována jako $\mathfrak{R}'(u) = \int_{u_0}^u i(v) \cdot dv$, kde $i(u_0) \cdot u_0 = 0$.

Mějme nelineární jednobran se statickou charakteristikou podle obr. 2.5.1. Pro proudy větší než i_B nelze definovat disipační kofunkci, neboť závislost $i = i(u)$ se stává nejednoznačnou. V oblasti proudů menších než i_B resp. napětí menších než u_B lze definovat jak disipační funkci, tak kofunkci. V této oblasti platí $\mathfrak{R}(i) + \mathfrak{R}'(u) = i \cdot u$.



Obr. 2.5.1: Charakteristika nelineárního jednobranu

Podle definice platí, že disipační funkci jednobranu z obr. 2.5.1 lze definovat pro dolní integrační meze $i_0 = A$, $i_0 = C$ nebo $i_0 = D$.

U lineárního jednobranu jsou hodnoty disipační funkce a kofunkce shodné a rovnají se polovině ztrátového výkonu na jednobranu.

Disipační funkce a kofunkce se používaly již velmi dávno v analytické dynamice, pro elektrické jednobrany je nově definoval Millar, pro vícebrany Penfield, Duinker a Stern (viz [9]). U vícebranů jsou dvojice napětí a proudů vektorové a platí následující definice:

Definice 2.3: Pro rezistivní reciproční element, jehož obvodové rovnice lze napsat ve tvaru

a) $\vec{u} = \vec{u}(\vec{i})$, se definuje *disipační funkce* jako

$$\Re(\vec{i}) = \int_{\vec{i}_0}^{\vec{i}} \vec{u}^T(\vec{j}) \cdot d\vec{j}, \quad (2.4)$$

kde $\vec{u}^T(\vec{i}_0) \cdot \vec{i}_0 = 0$.

b) $\vec{i} = \vec{i}(\vec{u})$, se definuje *disipační kofunkce* jako

$$\Re'(\vec{u}) = \int_{\vec{u}_0}^{\vec{u}} \vec{i}^T(\vec{v}) \cdot d\vec{v}, \quad (2.5)$$

kde $\vec{i}^T(\vec{u}_0) \cdot \vec{u}_0 = 0$ a symbol T je značka pro transpozici vektoru.

Metoda pro test stability pomocí disipační funkce se dá shrnout do následujících kroků:

(1) Sestavení disipační (ko)funkce, (2) rozšíření obvodu o reaktance, (3) zkoumání stability rozšířeného obvodu podle typu stacionárních bodů disipační funkce.

(1) Sestavení disipační (ko)funkce

Předpokládejme, že lze vybrat takovou množinu větvových proudů \vec{i} , že všechny ostatní obvodové veličiny lze vyjádřit pomocí nich. Každou takovou větev přerušíme a dva vzniklé uzly považujeme za bránu, kterou budíme vnějším napětím, vektorově vyjádřeno \vec{u} . Pokud se obvod jeví z hlediska těchto bran jako reciproký, pak sestavíme disipační funkci podle rovnice (2.4), kde napětí a proudy jsou výše uvedené branové veličiny. Rovnovážné body odpovídají nulovému napěťovému buzení, dají se tedy najít jako řešení rovnice

$$\vec{u} = \frac{\partial \Re(\vec{i})}{\partial \vec{i}} = \vec{0}. \quad (2.6)$$

Obdobně bychom získali disipační kofunkci. Předpokládejme, že lze vybrat takovou množinu napětí uzlových párů \vec{u} , že všechny ostatní obvodové veličiny lze vyjádřit pomocí nich. Každý z těchto uzlových párů považujeme za bránu, kterou budíme vnějším proudem, vektorově vyjádřeno \vec{i} . Pokud se obvod jeví z hlediska těchto bran jako reciproký, pak sestavíme disipační kofunkci podle rovnice (2.5), kde napětí a proudy jsou výše uvedené branové veličiny. Rovnovážné body odpovídají nulovému proudovému buzení, dají se tedy najít jako řešení rovnice

$$\vec{i} = \frac{\partial \Re'(\vec{u})}{\partial \vec{u}} = \vec{0}. \quad (2.7)$$

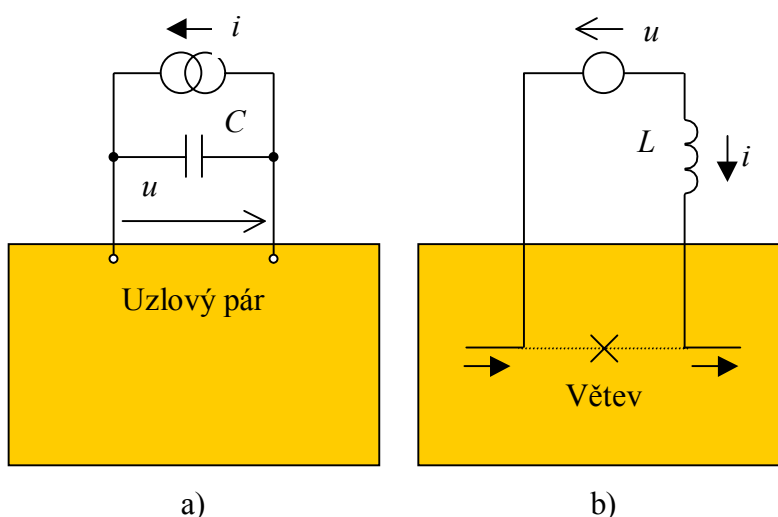
Ze způsobu sestavení disipační (ko)funkce je zřejmá platnost následující věty:

Věta 2.3: Jestliže lze definovat disipační funkci (2.4) obvodu vzhledem k napětovému buzení větví nebo kofunkci (2.5) obvodu vzhledem k proudovému buzení uzlových párů, pak rovnovážné body obvodu odpovídají stacionárním bodům disipační (ko)funkce.

K tomu, abychom stanovili stabilitu rovnovážných bodů, musíme obvod rozšířit o reaktance.

(2) Rozšíření obvodu o reaktance

V [9] se postupuje tak, jak ukazuje obr. 2.5.2. V případě a) je sestavována disipační kofunkce a ke každému vybranému uzlovému páru se přiloží paralelní kapacitor s kladnou parazitní kapacitou spolu s proudovým zdrojem. V případě b) sestavujeme disipační funkci a vkládáme sériový induktor s kladnou parazitní indukčností do přerušené větve spolu s napětovým zdrojem.



Obr. 2.5.2: Rozšíření obvodu o reaktance

(3) Zkoumání stability podle typu stacionárního bodu

Přidáním reaktančních prvků do obvodu přecházejí algebraické podmínky rovnováhy (2.6) a (2.7) v diferenciální rovnice

$$\dot{\vec{\lambda}} = -\frac{\partial \mathfrak{R}(\vec{i})}{\partial \vec{i}} = -\vec{u}(\underline{L}^{-1} \cdot \vec{\lambda}), \quad (2.8)$$

$$\dot{\vec{q}} = -\frac{\partial \mathfrak{R}'(\vec{u})}{\partial \vec{u}} = -\vec{i}(\underline{C}^{-1} \cdot \vec{q}), \quad (2.9)$$

kde $\vec{\lambda} = \int \vec{u} dt$ je indukční tok (značení z lit. [9] a [49]) a $\vec{q} = \int \vec{i} dt$ je elektrický náboj, \underline{L} a \underline{C} jsou indukčností a kapacitní matice odpovídající způsobu rozšíření o reaktance.

V [9] se dokazuje platnost následující věty:

Věta 2.4: Nechť je definována disipační funkce (2.4) obvodu vzhledem k napětovému buzení větví nebo kofunkce (2.5) obvodu vzhledem k proudovému buzení uzlových párů. Přidáme-li ke každému napětovému buzení sériový induktor

s kladnou indukčností nebo ke každému proudovému buzení paralelní kapacitor s kladnou kapacitou, pak *lokální minima disipační (ko)funkce odpovídají stabilním rovnovážným bodům a ostatní stacionární body odpovídají nestabilním rovnovážným bodům rozšířeného obvodu.*

2.6 Shrnutí

Kromě problémů, které s sebou nese rozšiřování stejnosměrného obvodu o reaktance, je tady problém spočívající v malé síle získaných kritérií stability. Příkladem je Greenova metoda a její Γ kritérium.

Green a Wilson uvedli v literatuře [1] definici, která umožňuje operovat s tzv. potenciální stabilitou stejnosměrného pracovního bodu na základě klasicky pojaté stability obvodu rozšířeného o reaktance. Nevýhodou Γ kritéria je to, že dává pouze postačující a nikoli nutnou podmínku pro nestabilitu. Kritérium odhalí pouze nestabilní body typu U^o .

Metoda prof. Valsy kombinuje Γ kritérium s metodou záporných odporů. Toto spojení může být silnější než samotné Γ kritérium v případě, že metoda záporných odporů odhalí nestabilitu typu U^e a U^c . Samotná kombinace metod však zřejmě nemá fyzikální opodstatnění.

Zdá se, že metoda záporných odporů by mohla být odvozena z metody disipační funkce. Disipační (ko)funkce však předpokládají reciprocitní popis obvodu, což metoda záporných odporů nevyžaduje a zvláště v zapojeních s řízenými zdroji tento požadavek nebývá splněn. Má-li být metoda záporných odporů postavena na rigorózní základ, musí být věnována náležitá pozornost právě podmínce reciprocity (viz části 5.1.1. a 5.2.2).

Kromě výše zmíněných metod existují i další méně používané přístupy k problematice DC stability. Zajímavá je např. práce [8], kde se pro hledání stability používají metody lineárního programování.

3 CÍL PRÁCE

Bez ohledu na různorodost přístupů, které byly diskutovány v předchozí kapitole, můžeme vysledovat následující společný rys.

Na stabilitu stejnosměrného obvodu se vždy usuzuje ze stability tohoto obvodu rozšířeného o reaktanční prvky. Stejnosměrná stabilita se proto definuje pomocí klasicky pojímané stability. Je to logický způsob, jak se dobrat k „neznámé“ stejnosměrné stabilitě přes klasickou stabilitu dynamického obvodu. Rozšíření obvodu o reaktance je zároveň cestou, jak se vyhnout nepříjemnému problému absence času v obvodech bez reaktancí.

Jedním z cílů práce je **pokračovat** touto cestou **až k formulaci frekvenčního kritéria stability**, které by ukázalo, jak se na celkově (ne)stabilním chování obvodu podílejí jednotlivé spektrální složky obvodových veličin a tedy i stejnosměrná složka. K tomu bude nutné nejprve **nově definovat stejnosměrnou (dále DC) stabilitu z hlediska frekvenčního**. Tento přístup umožní jasně vymezit vztah mezi DC stabilitou a stabilitou skutečnou.

Na druhou stranu je třeba si přiznat, že stejnosměrný obvod rozšiřujeme o reaktance hlavně proto, abychom si vůbec uměli představit, co to je stejnosměrná stabilita. Tím je dán rozpor, který je současným přístupům společný: doplnění stejnosměrného (dále DC) obvodu o reaktanční prvky je nutné pro zjištění DC stability, která však ve skutečnosti na těchto prvcích nezávisí. Uvedený rozpor by mohla vyřešit taková definice DC stability, která by nebyla závislá na definicích klasické dynamiky obvodů s reaktancemi a ve které by tudíž nefiguroval rozměr času ani frekvence. Taková definice by se však musela vzhledem k potřebné kompatibilitě s klasickými přístupy přímo zakládat na některé fyzikální teorii. Tak např. v [2] nalezneme definici tzv. strukturální stability, je však pojata čistě matematicky jako stabilita singulárního bodu funkce. Jako slibná se jeví myšlenka, že na nestabilitu by mohl ukazovat výskyt záporného odporu. Tato úvaha vychází z termodynamické povahy elektrického proudu stejně jako teorie disipační funkce, která je navíc velmi dobře fyzikálně podložena.

Potřeba jiné definice DC stability souvisí také s myšlenkou, že skutečnou stabilitu významně ovlivňuje regulační mechanismus, který je zabudován již do *stejnosměrných* vazeb. Tento mechanismus disponuje vlastní dynamikou, která je dána termodynamickou podstatou elektrického proudu. Dalším cílem práce bude **formulovat takovou definici DC stability, která pohlíží na stejnosměrný obvod jako na termodynamický systém**. Tato definice musí být v konečném důsledku ekvivalentní s klasickou definicí založenou na pojmech času nebo frekvence.

Překážkou pro praktické využití disipačních funkcí v testu DC stability je požadavek reciprocity, který však v řadě případů nemůže být splněn. Dalším cílem práce bude **vypracovat metodu, která umožní tento problém překonat a povede k formulaci termodynamického kritéria DC stability**. Toto kritérium bude vycházet ze zobecněné disipační funkce a bude dávat nutnou a postačující podmínku

pro DC (ne)stabilitu. Kritérium musí být ve formě logického výrazu, do kterého vstupují pouze DC parametry zapojení.

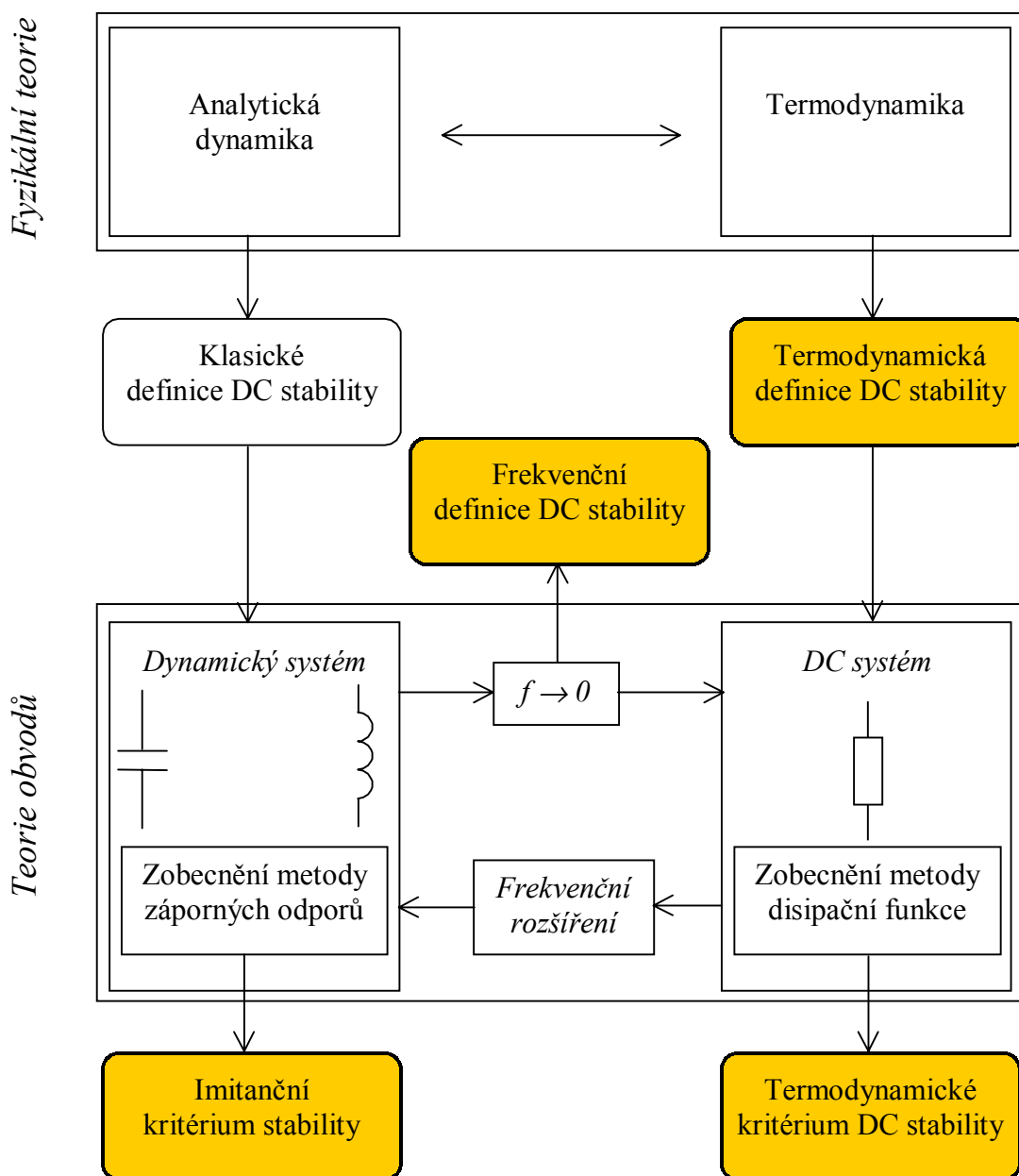
Bude věnována pozornost vztahu mezi DC stabilitou a stabilitou skutečnou. Jde o záležitost jak fundamentální, tak praktickou. Cílem je představit „dvousložkový“ model stability. Skutečné stability je dosahováno za přispění jak stejnosměrných, tak „klasických“ regulačních mechanismů. Prakticky jde o to, jak naložit s výsledkem testu DC stability ve vztahu ke stabilitě skutečné.

Dalším cílem je **aplikovat všechny získané metody** na případ DC obvodu obsahujícího rezistivní síť doplněnou řízenými zdroji nebo přímo obecnými makroobvody, které realizují danou algebraickou podmínku. Předpokládá se, že se bude vycházet z maticových postupů obvyklých u metody uzlových napětí.

4 ZVOLENÉ METODY ZPRACOVÁNÍ

4.1 Fyzikální pozadí současných metod

Vzhledem k tomu, jak jsou postaveny cíle práce, k jejich dosažení bylo třeba zpracovat velmi rozsáhlou problematiku (lit. [10], [12], [14]-[17], [34], [45]-[52]). Dnešní přístupy ke stabilitě stejnosměrných obvodů jsou totiž odvozeny ze dvou různých fyzikálních teorií (viz [22]). Myšlenka rozšiřování obvodu o reaktance souvisí s klasickým přístupem založeném na poznatcích z analytické dynamiky, metoda disipační funkce má svůj původ v termodynamice.



Obr. 4.1.1: Struktura cílů práce

Struktura cílů práce je představena na obr. 4.1.1. Stěžejní cíle jsou zvýrazněny barevným podkladem.

Dosavadní „klasické“ přístupy ke stabilitě vycházejí z principů, které byly v minulých staletích zformulovány na poli analytické dynamiky, tj. vědy o původně mechanickém a později obecném pohybu.

Je známo, že newtonovský popis stavu systému pomocí vektorových diferenciálních rovnic je dnes nejběžnějším způsobem, jak sledovat změny obvodových veličin pomocí tzv. pohybových rovnic. Tyto rovnice mají formálně stejnou podobu jak v analytické dynamice, tak v teorii obvodů. Kromě toho se pro popis energetické stránky elektrických procesů využívá postupů, které mají svůj původ v tzv. skalárním popisu systému, který vznikl rovněž na půdě analytické dynamiky. Bližší rozbor těchto přístupů je uveden v oddílu 4.2 a v pracích [19], [20].

Z precizního aparátu analytické dynamiky vycházel také Ljapunov při budování své teorie stability, která se stala definičním i metodickým standardem pro řešení stability obecného dynamického systému. Dnešní „klasické“ postupy, mezi které patří metody založené na zkoumání linearizovaného modelu nebo metody Ljapunovových funkcí, jsou tedy odvozeny od fyzikálních teorií, které původně sloužily pro popis pohybu mechanických systémů.

Objasnění fyzikálního pozadí klasických přístupů ke stabilitě dává odpověď na otázku, proč musíme ke stejnosměrné stabilitě dojít nějakým limitním přechodem, při kterém se postupně „vytratí“ vliv reaktancí. Veškerý definiční i metodický aparát potřebný pro test stability je odvozen z vědy o mechanickém pohybu, ve které hrají zásadní roli překážky tomuto pohybu kladené, tj. inerce (hmotnost) a akumulace (pružnost). Přímo analogií těchto překážek pohybu jsou v teorii obvodů reaktance, které jsou zastoupeny induktory a kapacitory. Současné přístupy k DC stabilitě, např. Greenova metoda, se také neobejdou bez těchto reaktancí. Zatímco každý krok postupného „mizení“ reaktancí je popsitelný prostředky klasické teorie, limita ukazuje na výsledek, který leží už mimo dosah této teorie. Zdá se však, že tento limitní případ obvodu bez reaktancí patří do oblasti, kterou bez problémů pokrývá termodynamika.

Moderní nerovnovážná termodynamika vznikla ve 30. letech našeho století a je spojena se jménem norského badatele Onsagera. Termodynamický systém je popsán zobecněnými silami a zobecněnými toky, mezi kterými platí tzv. konstituční vztahy. Chápeme-li DC systém jako termodynamický, jsou zobecněnými silami a toky elektrická napětí a proudy a konstitučními vztahy jsou relace Ohmova zákona. Tyto relace je možno odvodit z obecného termodynamického principu, jímž je princip minimální produkce entropie. Produkce entropie se mapuje právě disipační funkcí systému. Odtud pochází myšlenka vyhledávat rovnovážné body jako stacionární body disipační funkce. Rozborem tohoto tématu se zabývá oddíl 4.3.

Studium těchto fyzikálních souvislostí ukazuje, proč při termodynamickém pojetí DC obvodu nepotřebujeme nutně čas ani reaktance. Ryze stejnosměrný systém disponuje vlastní dynamikou, která je skryta na mikroskopické úrovni.

Makroskopické veličiny napětí a proudu, se kterými pracujeme, jsou výsledkem statistiky nad projevy velkého množství nosičů náboje, které se jako celek řídí principem minimální produkce entropie. Regulační mechanismus zabudovaný do DC vazeb se projevuje tím, že veškeré fluktuace mimo statistický průměr se likvidují. Tento mechanismus není zjevný z rovnic Ohmova zákona, ale z disipační funkce, ze které vyplývají jak Ohmův zákon, tak další tendence systému vychýleného z rovnováhy.

Zatímco newtonovský mechanismus rovnováhy je zohledněn již v klasických definicích stability, definice DC stability založená na termodynamickém regulačním mechanismu dosud chybí (viz obr. 4.1.1). Vytvoření této definice zohlední skutečný fyzikální význam stejnosměrných jevů v elektrických obvodech a stane se východiskem pro formulaci termodynamického kritéria DC stability, ke kterému se současné metody snaží dobrat limitním procesem postupného odstraňování reaktancí.

Práce si vyžádala poměrně rozsáhlé studium principů analytické dynamiky i nerovnovážné termodynamiky. Bylo nutno zvážit, jak těchto poznatků využít v teorii obvodů. Hlavní výsledky těchto přípravných prací jsou shrnuty v oddílech 4.2 a 4.3, některé další podrobnosti jsou uvedeny v [13]. V oddílu 4.4 je možno najít zhodnocení vztahů mezi newtonovskými a termodynamickými principy vzhledem k potřebám teorie obvodů. V oddíle 4.5 je naznačen způsob, jak tato práce vznikala a jak budou její výsledky vyloženy.

4.2 Metody analytické dynamiky

4.2.1 Základní pojmy

Každý pohyb má svou příčinu. Transformaci příčiny v důsledek můžeme chápat jako působení jisté překážky. Obecná věda o pohybu rozeznává dva základní druhy překážek pohybu: disipační a retardační (viz lit. [13]).

Disipační překážky vnášejí do pohybu nevratnost, neboť způsobují nevratné přeměny energie v teplo. Mírou této překážky je odpor a je to veličina termodynamická.

Retardační překážky způsobují pouze fázové posuny mezi příčinou a následkem a podle polaritý těchto posunů se dělí na setrvačné (inerční) a akumulární.

Setrvačnost (inerce) je základní vlastností všech forem hmoty. V mechanice je její mírou tzv. setrvačná hmotnost shodná s hmotností gravitační. V elektrotechnice je nejčastěji známa jako indukčnost.

Akumulární překážky souvisí s pojmem potenciálu silových polí. Příčina pohybu může být akumulována, což se projeví jako momentální překážka pohybu. Její mírou je tzv. tuhost v mechanice nebo obrácená hodnota kapacity v elektrotechnice.

Kromě rezistoru, induktoru a kapacitoru jakožto nositelů odporu, indukčnosti a kapacity se pro zachování symetričnosti a uzavřenosti teorie zavádí pojem memristoru, i když dosud nebyl použit (viz lit. [14]).

Existenci akumulčních, inerčních a brzdících překážek pohybu je dána možnost dívat se na širokou škálu nejrůznějších systémů univerzálním způsobem. Newtonovský vektorový přístup k analýze je charakteristický tím, že systém se rozloží na soubor zobecněných hmotných bodů vázaných mezi sebou a okolím zobecněnými tuhostmi a odpory. Pro popis systému se běžně používají souřadnice polohy \vec{q} , rychlostí $\dot{\vec{q}}$ a zrychlení $\ddot{\vec{q}}$, preferují se hybnosti (impulsy) $\vec{p} = \underline{M} \cdot \dot{\vec{q}}$, kde \underline{M} je matice zobecněných hmotností. Newtonovské síly se definují jako $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Vektorové pohybové rovnice jsou n -rozměrné, kde n je počet hmotných bodů.

Při větším množství hmotných bodů se složitými vazbami je vektorový popis nepraktický. V těchto případech se dobře uplatňuje tzv. skalární popis připisovaný Leibnizovi. Důležitou úlohu v něm hrají stavové funkce, které posunují průběh analýzy do energetické roviny. Aditivní vlastnost těchto funkcí umožňuje popsat jedinou funkcí prakticky jakkoliv složitý systém. Vektorové pohybové rovnice se získají z tzv. principu, což v praxi obvykle znamená nalezení extrémální hodnoty jistého funkcionálu stavové funkce a vyžaduje použití variačního počtu. Velkou výhodou skalárního popisu je jeho invariantnost vůči takovým změnám souřadné soustavy, které nemají vliv na hledání extrému funkcionálu.

Pro vysvětlování některých partií klasické elektrotechniky se někdy využívají tzv. elektromechanické analogie. Nejčastěji odpovídá zobecněné souřadnici elektrický náboj, zobecněné síle pak elektrické napětí. Zobecněné rychlosti mají svůj protějšek v elektrických proudech a hybnostem odpovídají magnetické toky (viz např. [9]). Obvod je pak analyzován v souřadnicovém systému, který tvoří napětí a náboje. Dá se dobře použít hlavně u metody smyčkových proudů, která však není příliš vhodná pro počítačové zpracování. Dnes se pro analýzu na počítači používá z důvodu snadné algoritmizace metoda uzlových napětí (MUN), která vyžaduje souřadnicovou soustavu složenou z napětí a proudů. Také pro tuto soustavu byly vypracovány příslušné elektromechanické analogie.

Analogie mezi veličinami v mechanice a elektrotechnice jsou jen důsledkem podobnosti obou těchto disciplín co do vnitřní struktury. Prozkoumejme blíže dva základní přístupy k teoretické mechanice: vektorový a skalární.

4.2.2 Vektorový přístup

Klasická vektorová mechanika popisuje systém jako hmotný bod, na který působí vektor síly. Tato nauka stojí na třech Newtonových zákonech, které mají své analogie i v teoretické elektrotechnice.

- 1) Každé těleso zachovává stav klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud na ně nepůsobí vnější síla.
- 2) Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.
- 3) Vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr.

První Newtonův zákon postuluje existenci inerciální vztažné soustavy, druhý je hlavním pohybovým zákonem. V teorii obvodů odpovídá tomuto zákonu síly první nebo druhý Kirchhoffův zákon. O tom, který z nich to je, rozhoduje právě volba

souřadné soustavy. Třetí postulát o reakci musí být součástí každé fyzikální teorie. Zatímco pro klasickou mechaniku je charakteristické *symetrické* vzájemné působení, v elektrotechnice tomu může být i jinak. Elektronika zná prvky, které tomuto principu nevyhovují a vybočují tak z newtonovské koncepce (např. tranzistory, OZ aj.). V teoretické elektrotechnice totiž odpovídá zákonu o rovnosti akce a reakce tzv. princip reciprocity. Teorie obvodů ponechala charakter reakce na povaze jednotlivých prvků, které mohou být reciproční (*akce = reakce*) nebo nerekroční (*akce ≠ reakce*).

Modifikací postulátu o reakci tak vznikají teorie, jejichž některé závěry se jeví z hlediska klasické fyziky jako paradoxní. V analogové či řídicí technice může např. existovat perpetuum mobile (oscilátor apod.). Jedním z důsledků modifikace 3. Newtonova zákona je zdánlivá neplatnost zákona o zachování energie, což se prakticky promítá do možnosti nestability.

Označíme-li za \vec{F} součet vnějších sil, působících na hmotný bod s hmotností M ve směru souřadnice \vec{q} , lze Newtonův zákon síly formulovat jako rovnost $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Zavedeme symbol $\vec{I} = -M\ddot{\vec{q}}$ a nazveme jej inerční (setrvačnou) silou. Zákon síly je nyní možno zapsat ve tvaru

$$\vec{F} + \vec{I} = \vec{0}. \quad (4.1)$$

Vztah (4.1) je vyjádřením D'Alembertova principu, který ve své zobecněné podobě říká, že *libovolné množství sil se nachází v rovnováze, přidáme-li k aktivním silám síly inerce* (viz [10]). Princip tak převádí dynamickou úlohu na úlohu o statické rovnováze.

Označíme-li sílu, působící na k -tou částici, vektorem \vec{F}_k a inerční sílu této částice \vec{I}_k , pak součet

$$\vec{F}_k^e = \vec{F}_k + \vec{I}_k \quad (4.2)$$

se nazývá *efektivní síla* pro k -tou částici. Z její definice je zřejmé, že je rovna nule pro volnou částici nebo síle reakce pro částici vázanou. Rovnici (4.2) použijeme později v oddíle 4.2.3 při odvozování Hamiltonova principu.

V případě, že výsledná síla \vec{F} působící na soustavu n zobecněných hmotných bodů se dá rozložit na složky závislé jen na čase t (vnější buzení \vec{F}^t), jen na poloze \vec{q} (potenciální síla \vec{F}^q) a jen na rychlosti $\dot{\vec{q}}$ (disipační termodynamická síla $\vec{F}^{\dot{q}}$), tj. $\vec{F} = \vec{F}^t - \vec{F}^q - \vec{F}^{\dot{q}}$, pak lze po linearizaci získat pohybové rovnice systému ve tvaru

$$\underline{M} \cdot \ddot{\vec{q}} + \underline{B} \cdot \dot{\vec{q}} + \underline{D} \cdot \vec{q} = \vec{F}^t, \quad (4.3)$$

kde \underline{M} je matice zobecněných hmotností, \underline{B} je matice zobecněných odporů a \underline{D} je matice zobecněných tuhostí. Není obtížné představit si elektrickou obdobu rovnic (4.3) ve tvaru

$$\underline{L} \cdot \ddot{\vec{q}} + \underline{R} \cdot \dot{\vec{q}} + \underline{D} \cdot \vec{q} = \vec{U}^t, \quad (4.4)$$

kde \vec{q} je vektor elektrických nábojů, \underline{L} je matice vlastních a vzájemných indukčností, \underline{R} je odporová matice, \underline{D} je matice inverzních kapacit a \vec{U}^t je vnější napěťové buzení.

Newtonova mechanika se k otázce stability vyjadřuje tak málo jako Kirchhoffova elektrotechnika. Vyplývalo to z charakteru zkoumaných systémů. Pasivní systémy se vlivem platnosti 3. Newtonova zákona o rovnosti akce a reakce jeví většinou také jako systémy stabilní. Newtonově mechanice je proto problém stability cizí. Zde je nutno hledat prapříčinu toho, proč teorie obvodů potřebuje ke kontrole stability nezávislý paralelní test, který není organickou součástí této teorie. Na rozdíl od mechaniky je v teorii obvodů nestabilita zcela korektním jevem, neboť zákon o akci a reakci je modifikován na zákon o reciprocitě.

Výše uvedené problémy se stabilitou se vyskytují i v jiných oborech, které převzaly newtonovskou koncepci, přičemž si postulát o vztahu akce a reakce upravily podle svých potřeb. Tak např. teorie řízení si jej upravila na tvar, že reakce je vždy rovna nule, což umožnilo přirozeně symetrické vazby v systému rozložit na vazby jednostranné a představit systém jako orientované blokové schéma. O stabilitě je možno rozhodnout dodatečným testem, kterému se podrobí vektorová pohybová rovnice. Takovýto test musí být svým založením integrální povahy, tj. nevychází pouze z okamžitého stavu systému jako vektoru, ale pracuje s veličinami výkonovými či energetickými. Jako takový tedy přesahuje rámec vektorové mechaniky.

Energie je však pojem, který už patří do tzv. skalární dynamiky.

4.2.3 Skalární přístup

Skalární dynamika, která je připisována Leibnizovi, vidí veškerý pohyb jako důsledek splňování tzv. *principu* (lit. [9]-[13], [15], [52]). Naplněním principu je skutečnost, že systém si pro svůj skutečný pohyb "zvolí" takovou trajektorii, která ze všech možných trajektorií minimalizuje daný funkcionál z jisté stavové funkce. Stavová funkce je skalární funkce neboli představuje číslo závislé na stavu systému. Většinou je to nějaký druh energie nebo výkonu.

Stavovou funkcí, která globálně popisuje akumulaci překážky pohybu, je potenciální energie. Pro potenciální síly \vec{F}^q se definuje jako křivkový integrál

$$V(\vec{q}) = \int_{\vec{q}_0}^{\vec{q}} \vec{F}^{qT}(\vec{Q}) \cdot d\vec{Q}, \quad (4.5)$$

\vec{Q} je integrační proměnná pro souřadnici \vec{q} . Tento vztah je formálně shodný se vztahem pro výpočet energie v elektrickém poli soustavy nabitých kapacitorů, stačí dosadit za zobecněné síly napětí na kapacitorech a za zobecněné souřadnice elektrické náboje.

Z potenciální energie (4.5) lze odvodit kompletní vektor potenciálních sil derivováním

$$\vec{F}^q = \frac{\partial V(\vec{q})}{\partial \vec{q}} = \text{grad}_{\vec{q}} V = \nabla_{\vec{q}} V. \quad (4.6)$$

Po linearizaci kolem rovnovážného bodu dostaneme pro odchylky od rovnováhy $d\vec{q}$ nejběžnější vztah pro potenciální energii jako kvadratickou formu

$$V(d\vec{q}) = \frac{1}{2} d\vec{q}^T \cdot \underline{D} \cdot d\vec{q},$$

kde \underline{D} je matice zobecněných tuhostí, mezi které lze počítat i inverzní kapacity. Pro účely duálního vyjádření podle doplňkových souřadnic se definuje potenciální koenergie (viz [9], [10], [13]) jako

$$V'(\vec{F}^q) = \int_{\vec{F}_0^q}^{\vec{F}^q} \vec{q}^T(\vec{f}) \cdot d\vec{f}, \quad (4.7)$$

\vec{f} je integrační proměnná pro sílu \vec{F} . Kinetická energie se definuje jako potenciál

$$T(\vec{p}) = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} \dot{\vec{q}}^T(\vec{P}) \cdot d\vec{P}, \quad (4.8)$$

\vec{P} je integrační proměnná pro impuls \vec{p} a kinetická koenergie jako

$$T'(\dot{\vec{q}}) = \int_{\dot{\vec{q}}_0}^{\dot{\vec{q}}} \vec{p}^T(\dot{\vec{Q}}) \cdot d\dot{\vec{Q}}. \quad (4.9)$$

$\dot{\vec{Q}}$ je integrační proměnná pro rychlost $\dot{\vec{q}}$. Tento vztah je formálně shodný se vztahem pro výpočet energie v magnetickém poli soustavy induktorů, stačí dosadit za zobecněné hybnosti indukční toky a za zobecněné rychlosti elektrické proudy.

Z kinetické koenergie (4.9) lze odvodit kompletní vektor impulsů derivováním

$$\vec{p} = \frac{\partial T'(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{\vec{q}}} = \text{grad}_{\dot{\vec{q}}} T' = \nabla_{\dot{\vec{q}}} T'. \quad (4.10)$$

Pro linearizovanou závislost impulsů na rychlostech dostaneme nejběžnější vztah pro kinetickou koenergi

$$T'(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot \underline{M} \cdot \dot{\vec{q}},$$

\underline{M} je matice zobecněných hmotností. Disipační funkce se definuje jako

$$\mathfrak{R}(\dot{\vec{q}}) = \int_{\dot{\vec{q}}_0}^{\dot{\vec{q}}} \vec{F}^q T'(\dot{\vec{Q}}) \cdot d\dot{\vec{Q}}, \quad (4.11)$$

což formálně odpovídá dřívějšímu definičnímu vztahu (2.4).

Z disipačního potenciálu (4.11) lze odvodit kompletní vektor disipačních sil derivováním

$$\vec{F}^q = \frac{\partial \mathfrak{R}(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{\vec{q}}} = \text{grad}_{\dot{\vec{q}}} \mathfrak{R} = \nabla_{\dot{\vec{q}}} \mathfrak{R}. \quad (4.12)$$

Pro linearizovaný systém dostaneme nejběžnější tvar disipační funkce

$$\mathfrak{R}(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot \underline{R} \cdot \dot{\vec{q}},$$

\underline{R} je matice zobecněných odporů. Pro účely duálního vyjádření pohybových rovnic pomocí zobecněných rychlostí (obdoba prvního Kirchhoffova zákona v elektrotechnice) se zavádí disipační kofunkce

$$\mathfrak{R}'(\vec{F}^q) = \int_{\vec{f}_0^q}^{\vec{f}^q} \dot{\vec{q}}^T(\vec{f}^q) \cdot d\vec{f}^q \quad (4.13)$$

opět zcela ve shodě s dřívějším definičním vztahem (2.5).

Zavedením stavových funkcí popisujících inerční, akumulární a disipační překážky pohybu jsme získali dostatečný aparát pro tzv. skalární popis systémů. Zamysleme se nyní nad principem, který bývá některými autory (např. [10]) označován základním kamenem analytické dynamiky. Je to princip virtuální práce. Virtuální posunutí je myšlenkový pokus charakteru matematické sondy. Dovoluje zjistit vnitřní tendence systému, jak by reagoval na fiktivní změny vnějších okolností. Dovoluje zodpovědět takové otázky jako např.: Co by se stalo, kdyby byl systém nepatrně vychýlen z rovnovážného bodu určitým směrem? Vygeneroval by protisílu nebo by změnu naopak podpořil? Metoda virtuálních posunutí tak dokáže zkoumat nejen fiktivní pohyby, ke kterým z makroskopického hlediska nikdy nemůže dojít, ale navíc dokáže zdůvodnit, proč si systém pro svůj pohyb „vybírá“ právě tu optimální trajektorii a žádnou jinou. Protože budeme této metodiky využívat při interpretaci termodynamického kritéria stability, všimněme si jí blíže.

Ze statiky je známo, že rovnovážný stav systému je podmíněn nulovou výslednicí působících sil. Ze vztahu (4.6) pro potenciální síly je patrné, že rovnováha odpovídá lokálnímu extrému potenciální energie. Lokální extrém znamená nulový první diferenciál. Uvažujeme-li rovnovážný bod v počátku souřadné soustavy, pak se dá podmínka rovnováhy zapsat jako

$$dV = (\text{grad}_{\vec{q}} V)^T \cdot d\vec{q} = 0. \quad (4.14)$$

Vektor $d\vec{q}$ může mít libovolný směr. Představuje tak jakousi „matematickou sondu“, zjišťující gradient pole v daném bodě.

Při pohybu má diferenciál polohy $d\vec{q}$ v daném okamžiku zcela konkrétní podobu. V mnoha případech bychom potřebovali zjistit, co by se stalo, kdyby se systém nacházel v čase t místo ve stavu \vec{q} v jiném stavu $\vec{q} + \delta \vec{q}$. Symbol $\delta \vec{q}$ se liší od skutečného diferenciálu $d\vec{q}$, způsobeného pohybem, tím, že představuje posunutí *fiktivní*, které je libovolného směru a neprobíhá v čase. Nazývá se variace polohy a představuje skutečnou „matematickou sondu“, myšlenkový pokus.

Pro statický případ (4.14) platí $d\vec{q} = \delta \vec{q}$. Podmínku statické rovnováhy (4.14) použijeme na D'Alembertův princip (4.1). Za pohybu je efektivní síla, působící na systém, nulová neboli $\vec{F}^e = \vec{F} - \dot{\vec{p}} = \vec{0}$. Dynamickou úlohu tak můžeme redukovat na problém statické rovnováhy. Jsou-li síly \vec{F} potenciální, dostaneme

$$\delta w^e = \left[-\vec{F}^q(\vec{q}, t) - \dot{\vec{p}}(\dot{\vec{q}}, t) \right]^T \cdot \delta \vec{q} = 0. \quad (4.15)$$

Vztah (4.15) je jinou formulací D'Alembertova principu a říká, že virtuální práce efektivních sil je za pohybu nulová. Slovo virtuální naznačuje, že jde o fiktivní práci, vykonanou efektivními silami na fiktivních posunutích $\delta \vec{q}$.

Jelikož jsme uvažovali potenciální síly, musí být výraz $\vec{F}^{qT}(\vec{q}, t) \cdot \delta \vec{q}$ totálním diferenciálem. Takové síly se nazývají monogenní, tj. odvoditelné z jediné skalární funkce. Jinak je tomu s výrazem $\dot{\vec{p}}^T(\dot{\vec{q}}, t) \cdot \delta \vec{q}$, který nemůže být interpretován jako totální diferenciál nějaké skalární funkce. Newtonovská síla $\dot{\vec{p}}(\dot{\vec{q}}, t)$ proto patří mezi tzv. polygenní síly. Výraz (4.15) pro virtuální práci efektivních sil tedy není totálním

diferenciálem a je tudíž neintegrovatelnou diferenciální formou. Hamilton ukázal, že tento nedostatek lze napravit integrací podle času. Dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w^e dt = \int_{t_1}^{t_2} [-\vec{F}^q(\vec{q}, t) - \dot{\vec{p}}(\dot{\vec{q}}, t)]^T \cdot \delta \vec{q} dt = \vec{0}. \quad (4.16)$$

Prostřední integrál rozložíme na dva; první z nich lze zapsat ve tvaru

$$\int_{t_1}^{t_2} -\vec{F}^{qT}(\vec{q}, t) \cdot \delta \vec{q} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} V dt,$$

druhý vypočteme metodou per partes

$$\int_{t_1}^{t_2} -\dot{\vec{p}}^T(\dot{\vec{q}}, t) \cdot \delta \vec{q} dt = -[\vec{p}^T \cdot \delta \vec{q}]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{p}^T(\dot{\vec{q}}, t) \cdot \delta \dot{\vec{q}} dt,$$

přičemž $\vec{p}^T(\dot{\vec{q}}, t) \cdot \delta \dot{\vec{q}} = \delta T'$ je variace kinetické koenergie. Dosazením mezivýsledků do (4.16) dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w^e dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T' - V) dt - [\vec{p}^T \cdot \delta \vec{q}]_{t_1}^{t_2}. \quad (4.17)$$

Rozdíl kinetické koenergie a potenciální energie je velmi důležitá veličina a nazývá se Lagrangeova funkce nebo zkráceně Lagrangián $L = T' - V$.

Budeme vycházet z toho, že počáteční $\vec{q}(t_1)$ a koncový $\vec{q}(t_2)$ stav systému jsou pevně dány neboli $\delta \vec{q}(t_1) = \delta \vec{q}(t_2) = \vec{0}$. Pak lze (4.17) zapsat ve tvaru

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta w^e dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt. \text{ Protože podle D'Alemberta je práce virtuálních sil nulová po}$$

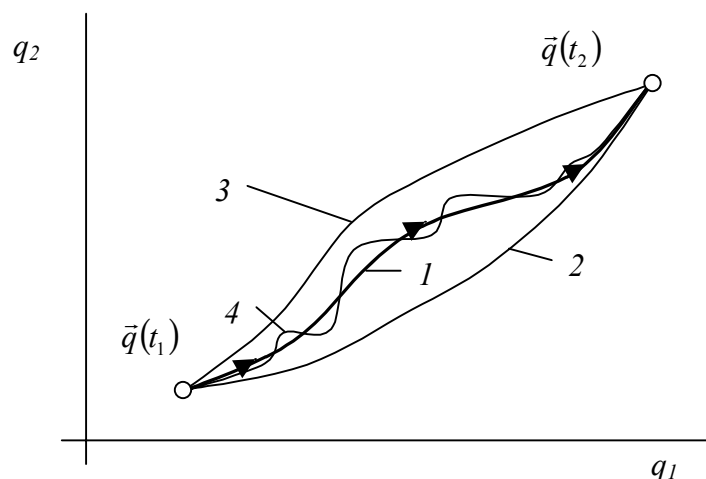
celou dobu pohybu, musí být nulový také integrál z této práce. Tím se dostáváme k Hamiltonovu principu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (4.18)$$

který říká, že pohyb systému se děje takovým způsobem, že určitý integrál $\int_{t_1}^{t_2} L dt$

neboli tzv. *účinek* nabývá stacionární hodnoty vzhledem k libovolným možným variacím trajektorie systému, při nichž začáteční a koncové body trajektorie zůstávají fixovány.

Situace je zachycena na obr. 4.2.1. Na osách grafu jsou vyneseny složky vektoru zastupujícího časově proměnnou polohu systému $\vec{q}(t)$. Koncový bod vektoru opisuje trajektorii jako křivku, kde parametrem je čas. Poloha systému v čase t_1 je znázorněna koncovým bodem vektoru $\vec{q}(t_1)$ a poloha v čase t_2 bodem $\vec{q}(t_2)$. Podle požadavků Hamiltonova principu si systém „vybírá“ způsob, jak přejít z jednoho bodu do druhého za podmínky dodržení obou časů t_1 a t_2 .



Obr. 4.2.1: Hamiltonův princip

Z trajektorií 1, 2, 3 a 4 si systém „vybere“ trajektorii, která minimalizuje za stejnou dobu integrál z rozdílu mezi kinetickou koenergií a potenciální energií. Okamžité odchylky mezi „správnou“ a fiktivní trajektorií jsou vektory $\delta \bar{q}(t)$.

Předpokládáme-li, že potenciální energie nezávisí na rychlostech $\dot{\bar{q}}$, vypočítají se newtonovské síly z Lagrangeovy funkce jako

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} \right).$$

Pokud je kinetická koenergie nezávislá na poloze \bar{q} , jsou potenciální síly dány vztahem

$$\vec{F}^q = - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}.$$

Ze zákona síly tedy vyplývá tzv. Eulerova rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \vec{0}, \quad (4.19)$$

která není ničím jiným než diferenciální pohybovou rovnicí (4.3) pro případ nebuzeného systému bez disipace. Jde o rovnováhu inerčních sil (majících původ v aktuálním pohybu systému) se silami potenciálními. Ty působí buď proti pohybu a vracejí systém do rovnovážného bodu (stabilní bod) nebo původní výchylku podporují a z původního bodu jej vytlačují (bod nestabilní). U stabilního rovnovážného bodu s pozitivně definitní kinetickou koenergií je pro zanikající inerční síly nutné, aby absolutní změna potenciální energie byla pro všechny možné počáteční výchylky záporná. To je možné jedině tehdy, má-li potenciální energie v rovnovážném bodu lokální minimum, tj. nachází-li se rovnovážný bod na dně potenciálové jámy. Obecně platí, že kinetické i potenciální funkce mohou záviset jak na polohách, tak i na rychlostech. Pak princip Hamiltonův (4.18) znamená, že rovnovážný bod se nachází v extrému účinkové funkce vzhledem k proměnným $\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix}$.

Všimněme si ještě případu, kdy souřadnice $\begin{bmatrix} \bar{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix}$ jsou mezi sebou vázány podmínkami

$$\vec{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \vec{0},$$

rozměr vektoru \vec{f} je dán počtem podmínek r . Pohyb se tedy nemůže odvíjet zcela volně, ale pouze ve shodě s předepsanými vazbami. Hamiltonův princip platí i v tomto případě, přičemž se Lagrangeova funkce L systému bez vazeb modifikuje vlivem vazeb na tvar

$$L^* = L + \vec{\lambda}^T \cdot \vec{f},$$

kde $\vec{\lambda}$ je vektor tzv. Lagrangeových neurčitých multiplikátorů a tvoří ve variační úloze další proměnné. Vektor souřadnic se nyní rozšiřuje na $[\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \vec{\lambda}]^r$. Nutná podmínka extrému modifikované Lagrangeovy funkce se rozšíří na dvě vektorové rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \bar{q}} = \vec{0},$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \vec{\lambda}} = \vec{0},$$

přičemž z druhé rovnice vyplývají vazební podmínky $\vec{f} = \vec{0}$.

Zajímavá je interpretace přidaných proměnných $\vec{\lambda}$. Fyzikálně mají význam zobecněných sil, které zajišťují, že budou dodrženy vazební podmínky $\vec{f} = \vec{0}$. Hamiltonův princip zobecněný na systémy s vazbami tedy umožňuje vypočítat nejen trajektorie, ale i reakční síly vazeb (viz [10]).

Hamiltonova principu se dá využít i pro výpočty v teorii obvodů, kde úlohu zobecněných souřadnic přebírají buď elektrické náboje nebo indukční toky. Díky tomu, že v elektrických obvodech se mohou vyskytovat negativně definitní energie magnetického pole, může dojít k tomu, že rovnováha na dně potenciálové jámy elektrického pole kapacitorů je nestabilní nebo naopak rovnováha na maximu této energie je stabilní. K těmto úvahám se vrátíme v okamžiku, kdy budeme zkoumat vztah mezi DC stabilitou a stabilitou skutečnou (část 5.1.3).

V elektrických obvodech mohou být některé veličiny mezi sebou vázány dodatečnými podmínkami. Stává se to např. v obvodech s řízenými zdroji. Metoda Lagrangeových multiplikátorů pak umožňuje vypočítat napětí a proudy, kterými řízené zdroje zajišťují splnění dané vazební podmínky. O této problematice bude pojednáno v části 5.2.7.

Je zjevné, že skalární dynamika má na rozdíl od vektorové dynamiky elegantní nástroje pro zkoumání stability. Těmito nástroji jsou stavové funkce neboli potenciály. Jsou to integrální funkce, které v sobě obsahují nejen informaci o okamžitém stavu systému, ale také informaci o všech možných stavech systému v okolí rovnováhy. Podaří-li se pro daný systém objevit jeho globální potenciál, nacházejí se rovnovážné body v jeho lokálních extrémech a o stabilitě rozhoduje povaha extrému (viz [14]).

Variační principy poskytují velmi zajímavé metody pro řešení problémů v mnoha vědních oborech, jak ukazuje např. publikace [11].

4.3 Metody termodynamiky

4.3.1 Základní pojmy

Termodynamický systém je makroskopický systém splňující tzv. disipativní podmínku.

Makroskopický systém je systém složený ze statisticky významného počtu podsystémů (částic), které na sebe působí v rámci vymezeného objemu silami krátkého dosahu, tj. elektromagnetickou nebo mechanickou interakcí.

Disipativní podmínka se projevuje tak, že chování systému vykazuje nevratnost v čase, tj. trajektorie pro $t \rightarrow -t$ již není možnou trajektorií.

Například rezistivní elektrický obvod je makroskopickým systémem, neboť elektrický proud je tvořen statisticky významným počtem nosičů náboje působících silami krátkého dosahu. Je navíc termodynamickým systémem, protože splňuje disipativní podmínku. Elektrický proud vyvolá oteplení vodiče, avšak opačný pochod, tj. vznik stejného proudu zahřátím vodiče, obecně možný není.

První termodynamický zákon, tj. zákon o zachování energie, říká, že vnitřní energie izolovaného systému se při pohybu zachovává, tj. platí $U = A + Q = \text{konst}$, přičemž se energie přelévá mezi tepelnou složkou Q a prací A .

Druhý termodynamický zákon říká, že při nekonečně pomalých změnách po trajektorii Γ platí

$$\oint_{\Gamma} \frac{dQ}{T} = \oint_{\Gamma} dS = 0.$$

Při vratných procesech se tedy zachovává nová veličina, tzv. entropie S . T je absolutní teplota.

Pro skutečnou trajektorii Γ^* platí vždy

$$\oint_{\Gamma^*} dS > 0,$$

tj. entropie v izolovaném systému vždy roste. Podle druhého termodynamického zákona nelze totiž teplo přeměnit beze zbytku na jiný druh energie, takže rozptýl energie ve formě tepla vnáší do pohybu prvek nevratnosti. Existence nevratnosti způsobuje, že všechny trajektorie systému nejsou ze statistického hlediska stejně pravděpodobné. Systém směřuje do rovnovážného stavu, který je pro něj současně stavem nejpravděpodobnějším.

V roce 1931 přišel norský fyzik a chemik L. Onsager se svou lineární teorií nevratných procesů (viz [12], [25]). Podobně jako klasická mechanika stojí na pojmech impulsu a newtonovské síly, Onsager vybudoval svou teorii na termodynamických tocích a silách. Termodynamickým tokem může být elektrický proud, tepelný tok, proud hmotných částic aj. Termodynamickou silou se obvykle rozumí gradient pole a může jí být např. elektrické napětí, teplota aj. Vztahy mezi termodynamickými silami a toky jsou známy např. jako Ohmův zákon

v elektrotechnice, Fourierův vztah pro šíření tepla nebo Fickův vzorec popisující difúzi. Tyto makroskopické fenomenologické zákony zahrnul Onsager do své lineární teorie vztahy

$$\vec{U} = \underline{R} \cdot \vec{I}, \quad \vec{I} = \underline{G} \cdot \vec{U}, \quad (4.20)$$

kde \vec{U}, \vec{I} jsou vektory termodynamických sil a toků a $\underline{R}, \underline{G}$ jsou matice termodynamických odporů a vodivostí. Vztahy (4.20) mohou popisovat jevy nejružnější příčiny, např. efekty způsobené současným působením elektrického proudu I_1 , napětí U_1 , teploty U_2 a tepelného toku I_2 . Říká se jim konstitutivní rovnice a představují vlastně termodynamickou obdobu Newtonova zákona síly.

Pro prvky matice \underline{G} (stejně tak matice \underline{R}) platí tzv. Onsagerovy–Casimirovy reciproční vztahy $G_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j G_{ji}$, kde součiny $\varepsilon_i \varepsilon_j$ nabývají hodnot 1 a -1 . Tyto relace plynou z invariantnosti jak klasických, tak i kvantově-mechanických pohybových rovnic vzhledem ke směru času. Příklad $\varepsilon_i \varepsilon_j = 1$ obdržel Onsager pro tzv. proměnné α -typu, jež jsou sudými funkcemi rychlosti molekul. Casimir vyšetřil případ tzv. β -parametrů, jež jsou lichými funkcemi rychlosti částic. Pro zachování recipročních vztahů pak musí platit $\varepsilon_i \varepsilon_j = -1$.

S různými formami recipročních vztahů se setkáváme i v teorii obvodů. Při vytváření termodynamického kritéria DC stability musíme překonat problém způsobený tím, že mnohé obvodové prvky zdánlivě porušují Onsagerovy–Casimirovy reciproční vztahy.

4.3.2 Termodynamické variační principy

Obecně platí, že entropie může v systému vznikat a zároveň ji může systém exportovat. Rovnice bilance celkové entropie systému tedy vypadá takto:

$$dS/dt = P(t) + J(t),$$

kde $P(t)$ je tzv. produkce entropie neboli množství entropie vzniklé za jednotku času v důsledku nevratných procesů uvnitř systému. Podle druhého termodynamického zákona je produkce entropie nezáporná. Druhý člen $J(t)$ představuje tok entropie do systému z okolí přes jeho povrch.

U termodynamických procesů, které se podaří rozložit na vzájemně reagující síly a toky, lze sledovat produkci entropie podle zákona

$$P(t) = \vec{U}^T \cdot \vec{I} = \vec{I}^T \cdot \vec{U},$$

tj. produkce entropie je úměrná okamžitému výkonu procesu. Aplikací lineárních vztahů (4.20) získáme další způsoby vyjádření produkce entropie

$$P(t) = \vec{U}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{U} = \vec{I}^T \cdot \underline{R} \cdot \vec{I}.$$

V lineární nerovnovážné termodynamice se používají tzv. disipační potenciály zavedené již dříve Rayleighem (1873) a Onsagerem (1931). Mají tvar

$$\Psi(\vec{U}) = \frac{1}{2} \vec{U}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{U} \quad (4.21)$$

a

$$\Phi(\vec{I}) = \frac{1}{2} \vec{I}^T \cdot \underline{R} \cdot \vec{I} \quad (4.22)$$

a rovnají se polovině rychlosti vzrůstu entropie. Funkce (4.21) a (4.22) se skutečně chovají jako potenciály, neboť platí

$$\frac{\partial \Psi(\vec{U})}{\partial \vec{U}} = \underline{G} \cdot \vec{U} = \vec{I}, \quad \frac{\partial \Phi(\vec{I})}{\partial \vec{I}} = \underline{R} \cdot \vec{I} = \vec{U}$$

a

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial U_i \partial U_j} = G_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial U_j \partial U_i} = G_{ji}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_i \partial I_j} = R_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial I_j \partial I_i} = R_{ji}.$$

První derivace disipačních potenciálů tedy obsahují lineární konstitutivní rovnice, z druhých derivací plynou Onsagerovy reciproční vztahy.

Disipační potenciály představují aparát, který nám pomůže odvodit variační principy, podle kterých se řídí pohyb v termodynamických systémech. V analytické dynamice hraje velkou roli rozdíl kinetické a potenciální energie, v termodynamice zase rozdíl mezi produkcí entropie a disipačním potenciálem. Prozkoumejme nejprve rozdíl

$$P(\vec{U}, \vec{I}) - \Phi(\vec{I}). \quad (4.23)$$

Budeme zkoumat jeho „citlivost“ na změnu toků, tj. za předpokladu konstantních sil. Dostaneme

$$\delta_I [P(\vec{U}, \vec{I}) - \Phi(\vec{I})] = \left[\frac{\partial P}{\partial \vec{I}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{I}} \right]^T \cdot \partial \vec{I}.$$

Není obtížné dokázat, že člen v hranaté závorce je vždy nulový, což je nutná podmínka extrému rozdílu (4.23). Z druhého termodynamického zákona vyplývá, že jde o maximum. Princip, ke kterému jsme došli, říká, že každá fluktuace termodynamického toku je usměrněna tak, aby se maximalizoval rozdíl (4.23), tj.

$$[P(\vec{U}, \vec{I}) - \Phi(\vec{I})]_I = MAX_I. \quad (4.24)$$

Platí i duální princip pro fluktuaci sil. Každá fluktuace termodynamických sil je usměrněna tak, aby

$$[P(\vec{U}, \vec{I}) - \Psi(\vec{U})]_{\vec{U}} = MAX_U. \quad (4.25)$$

V [12] je ukázáno, že v případě *stacionárního* systému se princip minimální produkce entropie zjednoduší na tvar

$$[\Phi(\vec{I})]_I = MIN_I \quad (4.26)$$

nebo

$$[\Psi(\vec{U})]_{\vec{U}} = MIN_U. \quad (4.27)$$

Zjednodušeně by se dal princip minimální produkce entropie formulovat tak, že fluktuace od rovnováhy se usměrňují po „stěnách“ disipačního potenciálu. Stabilní rovnovážný bod sídlí na dně disipační jámy tvaru konvexního paraboloidu, po jehož stěnách se fluktuace likvidují.

Často se nemluví o principu minimální produkce entropie, ale o principu minimálního rozptylu energie nebo o principu nejmenšího tepla (např. [9], [11], [12]). Pro další práci bude důležitá formulace nacházející se v [11], podle které se proudy tekoucí materiálem a vyhovující Ohmovu zákonu rozloží tak, aby vznikalo co nejmenší teplo.

4.4 Vztahy mezi metodami

4.4.1 Prolínání obou metod

Vztahy mezi analytickou dynamikou a nerovnovážnou termodynamikou jsou důležité pro pochopení vztahů mezi klasickou dynamikou reaktančního elektrického obvodu a dynamikou obvodu stejnosměrného. Každá metoda je zaměřena na popis jiných sil podle toho, zda se jedná o síly newtonovské nebo termodynamické. Tímto si nekonkurují, ale doplňují se navzájem.

Ačkoli je analytická dynamika zaměřena na newtonovské síly, využívá pro popis termodynamických sil termodynamického aparátu. Hamiltonův princip (4.18) platí jen pro konzervativní systémy, tj. pro systémy bez disipace. Eulerova rovnice (4.19) se proto doplňuje termodynamickou silou s použitím disipačního potenciálu na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{\vec{q}}} = \vec{0}. \quad (4.28)$$

Analytická dynamika je sice termodynamickým silám otevřená co do pohybových rovnic, oblast variačních principů je avšak pro ně nepřístupná. Rozšířená rovnice (4.28) totiž není řešením extrémální úlohy principu (4.18). Disipační síly jsou tedy v analytické dynamice cizím prvkem.

Podobný vývoj proběhl v termodynamice, která se začala otevírat newtonovským silám. V tzv. strukturní termodynamice se dnes běžně operuje s reaktančními prvky, v jejím rámci jsou zformulovány věty a objekty známé dosud hlavně z elektrotechniky jako je např. Tellegenův teorém, Ljapunovovy funkce apod. (viz [14]). Zdá se však, že z hlediska termodynamiky jde opět pouze o toleranci newtonovských, tj. cizorodých prvků.

V minulosti proběhly pokusy o sjednocení pohledu na oba typy sil, a to hlavně na poli analytické dynamiky. Šlo o hledání zobecněného Hamiltonova principu pro systémy s disipací energie. Podrobnosti je možno najít v [13] a [15] spolu s důkazem o nemožnosti rozšíření tohoto principu na nekonzervativní systémy. Je dokázáno, že takový zobecněný Lagrangián by musel být závislý na čase. Principiální nemožnost nalezení univerzálního variačního principu, který by pokrýval oba typy sil, naznačuje, že klasický i termodynamický popis systému jsou zcela rovnocenné, přičemž každý z nich je zaměřen na jinou fyzikální podstatu. Úplného popisu zřejmě není možno dosáhnout hledáním nějaké sjednocující teorie, ale respektováním situace v reálných systémech, ve kterých pozorujeme mezi klasickými a termodynamickými silami *rovnováhu a spolupráci*.

4.4.2 Rovnováha obou typů sil

Prozkoumejme energetickou bilanci stacionárního obvodu s RLC prvky, přičemž časově závislými obvodovými veličinami jsou náboje a buzení je napěťové \vec{U} . Pak platí zákon zachování energie

$$W_m(t) + W_e(t) + 2 \int_{t_0}^t \mathfrak{R}(\tau) d\tau = W_m(t_0) + W_e(t_0) + \int_{t_0}^t (\dot{\vec{q}}^T \cdot \vec{U}) d\tau,$$

kde $E(t) = W_m(t) + W_e(t)$ je tzv. motivační energie, která je rovna součtu energií magnetického pole induktorů a elektrického pole kapacitorů. U konzervativních systémů se tato energie zachovává konstantní.

Obecně platí

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^t (\dot{\vec{q}}^T \cdot \vec{U}) d\tau - 2 \int_{t_0}^t \mathfrak{R}(\tau) d\tau = W_m(t) + W_e(t)$$

a diferenciál motivační energie za pohybu bude

$$dE(t) = [\vec{q}^T \cdot \vec{U} - 2\mathfrak{R}] dt = [\dot{W}_m(t) + \dot{W}_e(t)] dt$$

neboli

$$dE(t) = [\vec{F}_T]^T \cdot d\vec{q} = [\vec{F}_N]^T \cdot d\vec{q}. \quad (4.29)$$

Pro nekonečně malá posunutí $d\vec{q}$ se celková energie soustavy $E(t)$ chová jako potenciální. Výrazy v hranatých závorkách (4.29) tedy znamenají síly spjaté se souřadnicemi q . Zobecněná síla (uvažujeme bez ztráty obecnosti linearizovaný systém)

$$\vec{F}_T = \vec{U} - \underline{R} \cdot \dot{\vec{q}}$$

je termodynamického původu, neboť způsobuje výměnu energie mezi systémem a okolím. Síla

$$\vec{F}_N = \underline{L} \cdot \ddot{\vec{q}} + \underline{D} \cdot \dot{\vec{q}}$$

je newtonovská. Obě tyto síly jsou v rovnováze, což vede k pohybové rovnici

$$\underline{L} \cdot \ddot{\vec{q}} + \underline{R} \cdot \dot{\vec{q}} + \underline{D} \cdot \vec{q} = \vec{U}. \quad (4.30)$$

Spolupráce těchto dvou sil je vidět i z pozice termodynamiky. Pokusme se rozšířit princip nejmenšího rozptylu energie na případ obou typů sil. V [13] je naznačen postup, kterým můžeme dojít k obecnému principu

$$[\dot{W}_m + \dot{W}_e + \mathfrak{R}]_{\vec{I}} = MIN_I \quad (4.31)$$

nebo

$$[\dot{W}_m + \dot{W}_e' + \mathfrak{R}']_{\vec{U}} = MIN_U. \quad (4.32)$$

Jde o diferenciální principy, podle kterých se systém v každém okamžiku „rozhoduje“ pro další pokračování pohybu tak, aby součet okamžitých hodnot motivačního výkonu a disipační (ko)funkce byl co nejmenší. Ono „rozhodování“ je zařízeno variací výrazu (4.31) nebo (4.32) podle stavové veličiny, která popisuje trajektorii. Vezměme si za příklad opět linearizovaný model obvodu popsany pomocí nábojů, s vnějším napět'ovým buzením \vec{U} , které zahrneme do výrazu potenciální funkce. Podle (4.30) pak zní minimalizační procedura takto:

$$\delta_{\dot{\vec{q}}} \left[\dot{\vec{q}}^T \cdot \underline{L} \cdot \ddot{\vec{q}} + \dot{\vec{q}}^T \cdot \underline{D} \cdot \vec{q} - \dot{\vec{q}}^T \cdot \vec{U} + \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \cdot \underline{R} \cdot \dot{\vec{q}} \right] = 0.$$

Po rozepsání naznačené variace zjistíme, že podmínka je platná jedině v případě, že tvar trajektorie vyhovuje v každém bodě pohybové rovnici (4.30).

Všimněme si, že obecný princip (4.31), resp. (4.32) má část newtonovskou a část termodynamickou a že pro systém bez reaktančních prvků přechází v princip nejmenší produkce entropie (4.26), resp. (4.27).

4.5 Vznik práce a postup výkladu

Práce vznikala „iteračním“ způsobem cestou hledání, omylů a častých návratů. Tato poměrně obtížná cesta postupně vedla k lepšímu porozumění souvislostí a k určitému nadhledu. Způsob výkladu již utříděné problematiky se proto bude lišit od způsobu, jakým se k výsledkům práce došlo.

Z dosavadního rozboru je zřejmé, že vlastní práci předcházelo rozsáhlé studium. Jeho výsledkem bylo postavení prvního cíle, jímž se stalo termodynamické kritérium DC stability, tj. přístup oproštěný od závislosti na reaktančních prvcích. Situaci můžeme sledovat na schématu na obr. 4.1.1. Nejprve vznikla termodynamická definice DC obvodu a DC stability. Následovalo termodynamické kritérium DC stability, přičemž se vycházelo z principu minimální produkce entropie a bylo nutno překonat problém nreciprocit. Velkou pomocí pro formulaci tzv. virtuální dynamiky DC obvodů byl princip virtuální práce používaný v mechanice a termodynamice. Pak se přešlo cestou frekvenčního rozšíření obvodových prvků i spektra fluktuací k tzv. imitančnímu kritériu stability, které je imitanční obdobou Nyquistova kritéria. Imitanční kritérium bylo vyzkoušeno pomocí počítačových simulací na mnoha aplikacích a přineslo některé zajímavé výsledky. Toto kritérium pak zpětně osvětlilo vztahy mezi klasickým a DC obvodem a příslušnými stabilitami na frekvenčním základě. Tento celkový postup tvoří ve schématu na obr. 4.1.1 smyčku.

Pro výklad problematiky byla zvolena názornější cesta. Nejprve zůstaneme v mezích klasického přístupu ke stabilitě a odvodíme imitanční kritérium. Toto kritérium má v sobě obsažen energetický prvek, který mají i variační metody analytické dynamiky a termodynamiky. Imitanční kritérium nám dá návod k tomu, jak definovat hranici mezi dynamickým a DC obvodem pomocí frekvenčního přechodu. Pak stanovíme termodynamickou definici DC obvodu a DC stability a odvodíme termodynamické kritérium. Postup výkladu tvoří ve schématu na obr. 4.1.1 cestu ve tvaru písmene „H“.

5 HLAVNÍ VÝSLEDKY PRÁCE

5.1 Imitanční kritérium

5.1.1 Základní představy

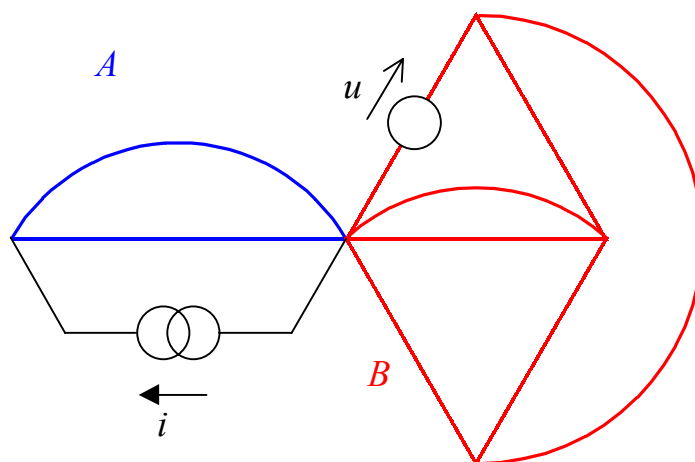
Výsledky této kapitoly by nemohly vzniknout bez prostudování lit. [57], kde se definuje tzv. pozitivní reálná funkce, lit. [58] o trajektoriích imitancí a lit. [59] o definici aktivního systému.

Současná teorie stability využívá tzv. vektorového popisu systému, který je převzat, jak jsme viděli v oddílech 4.1 a 4.2, z newtonovské dynamiky. Na stabilitu či nestabilitu se usuzuje z časového průběhu obvodových veličin systému, který byl ze svého rovnovážného stavu vychýlen poruchou. Pokud se systém po odeznění poruchy vrací do původního rovnovážného stavu, jsme ochotni prohlásit tento stav za stabilní, v opačném případě mluvíme o nestabilitě.

Pojetí stability jako schopnosti odolávat poruchám je vlastní zejména teorii řízení, nicméně dobře odráží i to, co se děje prakticky v každém elektrickém obvodu. Každá jeho větev vykazuje indukčnost, která je zdrojem napětí indukovaného z okolí. Tento typ poruchy bychom modelovali zařazením zdroje malého napětí sériově do každé větve. Dále působí v každé větvi všudypřítomné fluktuace nosičů proudu, které jsou termodynamického původu (viz část 4.3). Tyto fluktuace lze modelovat zdrojem malého proudu připojeného paralelně ke každé větvi, tj. mezi každé dva uzly. Konečně je tady zdroj poruch velmi malé frekvence způsobených pomalou změnou parametrů obvodu. Příčinou bývá stárnutí součástí, závislosti na teplotě a jiných okolních vlivech. Všechny tyto reálně existující poruchy působí, že systém je „vypuzen“ z nestabilního stavu a směřuje do nejbližší stabilní rovnováhy. Stabilní rovnováha je zaručena mechanismem, který poruchy likviduje, u nestabilní rovnováhy jsou odchylky naopak zesilovány (viz [26]).

Zavedeme-li do každé větve sériově napěťovou poruchu a paralelně proudovou poruchu, pak máme jistotu, že vyšetřovaná rovnováha bude spolehlivě prověřena. Za této situace však bude zdrojů poruch zbytečně mnoho. Na obr. 5.1.1 je graf obvodu složeného ze dvou separátních částí *A* a *B*. V části *A* působí zdroj proudové poruchy a v části *B* zdroj napěťové poruchy. Je zřejmé, že by nemělo smysl vkládat do části *A* paralelně k oběma větvím dva proudové zdroje, protože se dají nahradit jediným zdrojem s „malou“ amplitudou. Taktéž je jisté, že v případě maximalistické varianty budou některé zdroje nadbytečné z hlediska Kirchhoffových zákonů. Podrobnější rozbor této části problému bude proveden v oddílu 5.2.

Na druhou stranu není pochyb o tom, že počet zdrojů poruch nelze libovolně zmenšovat. Mohli bychom vypustit ty, které nejsou schopny systém destabilizovat? Je jisté, že ne každá porucha je schopna vypudit systém z nestabilní rovnováhy, avšak tato zdánlivě jednoduchá otázka se komplikuje u obvodů s neregulovatelnými prvky a bude rozebrána o něco později v částech 5.2.2 a 5.2.3. Věnujme se nejdříve problému umístění zdrojů poruch v obvodech se separátními částmi podle obr. 5.1.1.



Obr. 5.1.1: Umístění zdrojů poruch

Obecně bude záležet na tom, ve kterém místě porucha působí. Je zřejmé, že každý zdroj má vliv pouze na svou část obvodu. Pokud je mechanismus nestability obsažen v části A , nemůže být iniciován zdrojem u . Podobně nestabilita způsobená částí B nemůže být prověřena zdrojem i . Porucha nemůže dorazit ke kritickému místu (obvykle je to zpětnovazební smyčka) kvůli tomu, že je od něj oddělena.

Kromě nevhodného umístění zdroje poruchy může mít vliv na šíření fluktuace i nereciprocita souvislé části obvodu, která způsobí, že některé směry budou pro šíření poruchy neprůchodné. Kritického místa nebude dosaženo stejně jako v případě odděleného obvodu.

V nereciprocitních obvodech může navíc dojít k tomu, že nestabilita není vyvolána jednotlivě působícími poruchami, ale dojde k ní v případě, kdy tytéž poruchy působí *současně*. Za těchto okolností bývá velmi obtížné určit, které zdroje fluktuací odstranit a které v obvodu ponechat.

Vzhledem k těmto skutečnostem bude vhodné upřesnit pojem *stability vzhledem k poruše*.

Definice 5.1: Necht' na systém působí časově omezená porucha (fluktuace). *Stabilita vzhledem k poruše* je schopnost systému vrátit se do rovnovážného bodu, jestliže skončilo působení poruchy, která jej z tohoto bodu vychýlila.

Je zřejmé, že je-li rovnovážný bod systému stabilní vůči konkrétní poruše, nemusí být stabilní vzhledem k poruše jiné. Nestabilita vůči jedné poruše však znamená skutečnou nestabilitu. K dosažení cílů práce nám bude stačit zkoumání této slabší varianty testu stability, tj. stabilitu vzhledem k jedné konkrétní poruše.

Návod ke zjištění stability vůči poruše dává samotná její definice 5.1. Vypočítali bychom časovou odezvu *celého stavového vektoru* na danou poruchu. Bod zastupující stav systému by se musel v případě stabilního rovnovážného bodu po odeznění poruchy vrátit zpět.

Zkusme se však podívat na tento problém z jiné stránky, která bude v jistém ohledu zobecněním metody záporného odporu. Zdroj „stejnoseměrné“ poruchy by pracoval do zbytku obvodu jako do odporu. Záporné znaménko tohoto odporu by

signalizovalo podezření na nestabilitu. Reálný zdroj poruch je však z frekvenčního hlediska širokopásmový a pracuje do zbytku obvodu jako do kmitočtově závislé imitance. Dá se z charakteru imitance usoudit na stabilitu vůči dané poruše?

Uvažujme obecný systém linearizovaný kolem rovnovážného bodu. Předpokládejme napěťový zdroj časově omezené poruchy $u(t)$, který způsobí dodání proudu $i(t)$ do obvodu. Průběh proudu je dán průběhem napěťové poruchy a admitancí zbytku obvodu, který na poruchu reaguje. Co můžeme usoudit o stabilitě obvodu vůči poruše $u(t)$, jestliže proud $i(t)$ má tendenci časem neomezeně růst nebo kmitat? V tomto případě se zcela jistě jedná o nestabilitu. Jak je to však v případě, kdy s poruchou $u(t)$ zanikne i proud $i(t)$? Skutečnost, že se zánikem poruchy zanikne odchylka jedné obvodové veličiny, ještě neznamená, že zaniknou *všechny* odchylky. Stavový vektor se může nevratně vzdalovat od rovnovážného bodu pouze v některých souřadnicích, což se nemusí do proudové odezvy vůbec promítnout. Dá se tedy udělat tento dílčí závěr: *Z charakteru imitance, do které pracuje zdroj poruchy, se dá bezpečně usoudit pouze na nestabilitu vůči této poruše. Nestabilita se projeví tím, že zpětná reakce obvodu do zdroje časově omezené poruchy nezaniká s časem. Pokud tato reakce zanikne s časem, daný rovnovážný stav může být přesto nestabilní.*

Než si tyto myšlenky shrneme do tvaru kritéria, věnujme pozornost výše uvedené formulaci „... reakce ..nezaniká s časem“. V linearizovaném případě se nestabilita může projevit pouze těmito způsoby: veličina neohraničeně vzrůstá buď do kladných nebo do záporných hodnot nebo dojde ke kmitům s narůstající amplitudou.

Existuje ještě speciální případ, kdy se po odeznění poruchy veličina ustálí na jiné hodnotě než měla před poruchou. V části 5.2 uvidíme, že takové chování reakční veličiny nemusí znamenat nestabilitu.

V lineárních obvodech navíc můžeme vybrat za zdroj poruchy libovolný časově omezený signál. Odolnost vůči poruše znamená v lineárním případě odolnost vůči *libovolné* časově omezené poruše působící v daném místě. Vybereme-li v našem případě Diracův impuls, bude zpětná reakce do zdroje poruchy přímo časovým originálem Laplaceova obrazu příslušné imitance, do které zdroj pracuje.

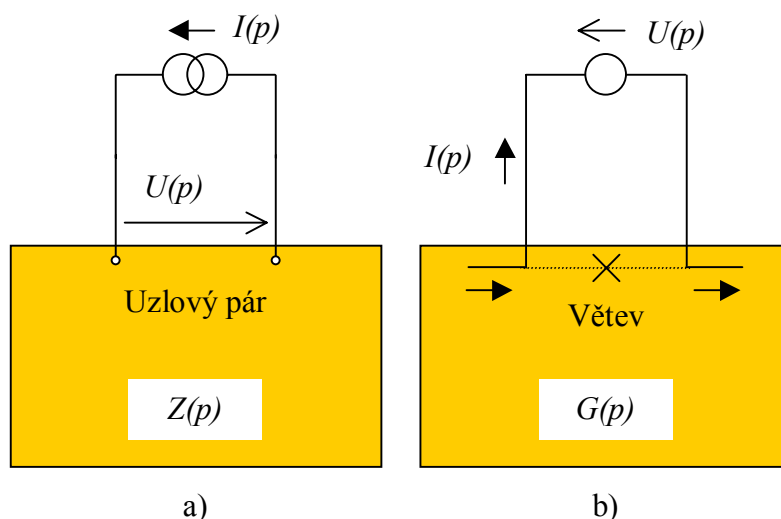
Tyto skutečnosti vedou k formulaci následujícího kritéria.

Věta 5.1: Mějme obvod linearizovaný kolem rovnovážného bodu. Do libovolné větve zařadíme napěťový zdroj poruchy $u(t)$, resp. mezi libovolné dva uzly připojíme proudový zdroj poruchy $i(t)$. Nechť $g(t)$ je proudová reakce obvodu na impulsní poruchu napěťového zdroje, resp. $h(t)$ je napěťová reakce obvodu na impulsní poruchu proudového zdroje. Daný rovnovážný bod je *nestabilní* vůči poruše $u(t)$, resp. $i(t)$, pokud existuje takové t_0 , že pro $t > t_0$ není možno najít čísla M_u , resp. M_i tak, aby platilo $|g(t)| < M_u$, resp. $|h(t)| < M_i$.

Tohoto kritéria lze využít ve spojení s počítačovými simulačními programy, které nám vypočítají časovou odezvu na impulsovou nebo jinou časově omezenou poruchu. Nabízí se však praktičtější formulace kritéria v operátorové podobě.

Laplaceovy obrazy funkcí $g(t)$ a $h(t)$ jsou totiž obrazy admitance $G(p)$ a impedance $Z(p)$ zbytku obvodu, do kterého pracují zdroje poruchy, jak ukazuje obr. 5.1.2. Proto platí následující věta.

Věta 5.2: Daný rovnovážný bod je *nestabilní* vůči poruše, pokud admitance $G(p)$, resp. impedance $Z(p)$, do které pracuje zdroj poruchy $u(t)$, resp. $i(t)$, má alespoň jeden pól v pravé komplexní polorovině.



Obr. 5.1.2: Stabilita vůči poruše

Důkaz je zřejmý, uvědomíme-li si, že Laplaceův obraz příslušné imitance je přímo obrazem reakce na impulsní poruchu. Pól v pravé komplexní polorovině znamená nestabilní odezvu popsanou ve větě 5.1. Pouze je nutno dodržovat zásadu, že vyšetřujeme póly admitanční funkce při napěťové poruše a impedanční funkce při proudové poruše.

Kritéria podle věty 5.2 lze využít v případech, kdy máme možnost přímo vyčíslovat póly imitanční funkce, tj. při analytických výpočtech nebo pomocí programů pro symbolickou analýzu.

Informace o pólech je však v mnoha případech nedostupná. Často však máme k dispozici hodografy admitance či impedance v komplexní rovině, tj. křivky $G(j\omega)$, resp. $Z(j\omega)$ pro $\omega \in (-\infty, \infty)$. Otázka zní, zda se dá z těchto průběhů poznat stabilita vůči dané poruše. Ještě než tuto otázku zodpovíme, bude vhodné seznámit se s fyzikálním pozadím problému. Imitance, do které příslušný zdroj fluktuace pracuje, vypovídá totiž ve skutečnosti o charakteru *energetické výměny* mezi tímto zdrojem a obvodem (viz [27], [28], [32]).

Pro názornost dalšího výkladu budeme bez ztráty obecnosti uvažovat o admitanci, do které pracuje zdroj napěťové fluktuace a která reaguje proudem $i(t)$. Odezva na Diracův napěťový impuls je impulsní odezva $g(t)$. Je-li systém stabilní vůči poruše $u(t)$, pak konverguje Fourierův integrál $G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$. Tento integrál ukazuje, jak je impulsní odezva rozložena do frekvenčního spektra co do amplitud a fází

jednotlivých harmonických složek. Pak lze považovat za korektní vztah mezi spektry napěťové akce (průběh $u(t)$ musí mj. vyhovovat podmínce absolutní integrovatelnosti) a proudové reakce $I(j\omega) = G(j\omega) \cdot U(j\omega)$. Účinek napěťové fluktuace je pak dán celkovou energií, která byla vyměněna mezi zdrojem fluktuace a zbytkem obvodu, což je podle Parsevalovy rovnosti dáno vztahem (lit. [54])

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |U(j\omega) \cdot I(j\omega)| \cdot \cos(\varphi(\omega)) d\omega.$$

Je vidět, že na celkovém účinku se podílí pouze zdánlivý výkon násobený účinníkem neboli činný výkon jednotlivých složek (správně bychom měli mluvit o frekvenčních hustotách energie). Použijeme-li zpětného rozkladu napětí a proudu do spektrálních složek, vyjde nám pro celkový účinek

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} U(j\omega) \cdot I(j\Omega) \cdot e^{j(\omega+\Omega)t} d\omega \cdot d\Omega \right) dt.$$

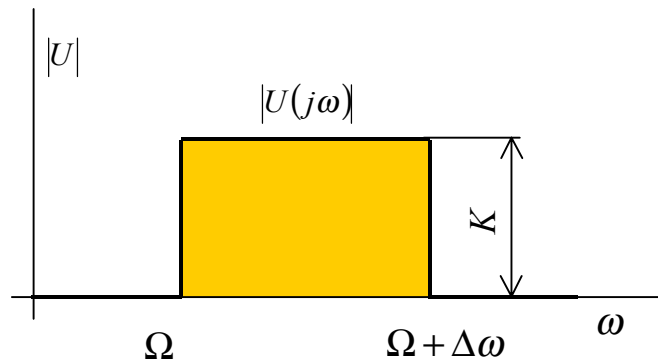
Dvojný integrál ukazuje, že v okamžitých výměnách energie mezi zdrojem fluktuace a pracovní admitancí figurují i vzájemné energie mezi různými spektrálními složkami, v celkové sumě se však neprojeví. Tyto deformační energie se však mohou projevit jinak, pokud na ně systém zareaguje v některém jiném ohledu (viz [16]).

U nestabilních obvodů již nelze některé obvodové veličiny popsat fourierovskými spektry. Svůj přímý fyzikální smysl mohou ztratit i trajektorie imitancí jako je např. $G(j\omega)$. Časové průběhy obvodových veličin nestabilních systémů jsou tedy obecně nepoužitelné pro Fourierovu transformaci. Za předpokladu, že jejich absolutní nárůst nedosahuje exponenciálního řádu (což je v praxi vždy splněno), lze pracovat s jejich Laplaceovými obrazy. Tak např. proudová reakce $i(t)$ nestabilního systému na napěťovou fluktuaci $u(t)$ může být transformována za výše uvedené podmínky na

$$I(p) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} i(t) e^{-\xi t} e^{-j\omega t} dt,$$

kde ξ je koeficient tlumení. Spektrum signálu již není postaveno na báze harmonických funkcí jako u Fourierovy transformace, nýbrž je složeno z harmonických funkcí s exponenciálním tlumením, které může nabývat všech reálných hodnot. Spektrum signálu je tedy charakterizováno nejen frekvencí složky, ale i příslušným tlumením. Obojí je obsaženo v pólech $p_i = \xi_i + j\omega_i$ Laplaceova obrazu, tj. v singulárních bodech vzájemné energie signálu a příslušných tlumených sinusovek.

Chceme-li pochopit energetickou povahu stability vůči poruše, musíme prozkoumat energetickou výměnu mezi zdrojem poruchy a samotným obvodem. K tomu budeme potřebovat vhodnou „testovací“ poruchu, nejlépe takovou, která je úzkopásmová a nese konečnou energii. Tento signál bychom frekvenčně přeladovali a zkoumali, co se s dodávanou energií děje na jednotlivých kmitočtech. Uvažujme pro jednoduchost signál se spektrem podle obr. 5.1.3.



Obr. 5.1.3: Spektrum testovací poruchy

Podle Parsevalovy rovnosti se dá ukázat, že zdroj fluktuační s magnitudou $K = \sqrt{\frac{\pi}{\Delta\omega}}$ konstantní ve frekvenčním pásmu $\langle \Omega, \Omega + \Delta\omega \rangle$ by dodal do čistě odporové zátěže o velikosti 1ohm energii 1 joule. Pracuje-li tento zdroj do admitance $G(j\omega)$, předá jí nevratně energii

$$\varepsilon(\Omega, \Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |U(j\omega)|^2 \cdot \text{Re}(G(j\omega)) d\omega = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Omega}^{\Omega + \Delta\omega} \text{Re}(G(j\omega)) d\omega.$$

Budeme-li nyní zmenšovat šířku pásma $\Delta\omega$, bude se zvyšovat magnituda K tak, aby energie signálu zůstala nezměněna. Pro velmi malou šířku pásma se testovací signál bude blížit tlumenému kosinovému signálu s dominantní frekvencí Ω . Pak můžeme s jistým zjednodušením říci, že při buzení admitance čistě harmonickým signálem o frekvenci Ω se do zátěže předá energie

$$\varepsilon_p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\Omega, \Delta\omega) = \text{Re}(G(j\Omega)).$$

Zdroj fluktuační si na této frekvenci vyměňuje se zátěží jalovou složku

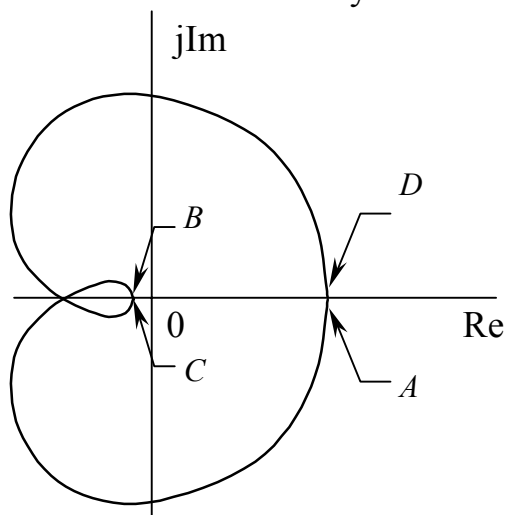
$$\varepsilon_q = \text{Im}(G(j\Omega)).$$

Činnou a jalovou složku lze tedy pro každou frekvenci pohodlně odečíst z trajektorie admitance v komplexní rovině. Totéž platí samozřejmě i pro impedanci, do které pracuje proudová porucha. Tuto zákonitost lze formulovat následující větou.

Věta 5.3: Mějme napěťový zdroj $U(j\omega)$ pracující do admitance $G(j\omega)$ nebo proudový zdroj $I(j\omega)$ pracující do impedance $Z(j\omega)$. Pak činná (jalová) složka výkonu na dané frekvenci směřující ze zdroje do příslušné imitance je přímo úměrná reálné (imaginární) části imitance pro tuto frekvenci.

Na obr. 5.1.4 je příklad trajektorie imitance, do které pracuje zdroj poruchy. Za symboly A , B , C a D si můžeme v různém pořadí dosadit frekvence $-\infty$, 0^- , 0^+ a $+\infty$. Na frekvencích, kde je $\text{Re}(G(j\Omega)) > 0$, proudí energie ze zdroje do obvodu, takže obvod se chová jako spotřebič činného výkonu. Mohou však existovat frekvenční rozsahy, kde $\text{Re}(G(j\Omega)) < 0$ a energii dodává obvod zpět do zdroje.

Energetická stránka spolupráce mezi zdrojem a spotřebičem bude jistě dobře vypovídat o stabilitě tohoto procesu. V další části se budeme zajímat o to, jak zjistit z trajektorie imitance podle obr. 5.1.4 stabilitu systému vůči poruše.



Obr. 5.1.4 Příklad trajektorie imitance

5.1.2 Odvození imitančního kritéria

Pro odvození imitančního kritéria stability použijeme větu o argumentu, velmi dobře známou z teorie komplexní proměnné (viz např. [17]).

Věta 5.4: Necht' komplexní funkce $G(p)$ komplexní proměnné p je regulární všude v uzavřené oblasti Θ kromě konečného počtu pólů a nemá na hranici této oblasti ani póly, ani nuly. Pak rozdíl v počtu nulových bodů a pólů této funkce uvnitř oblasti Θ , kde každý pól a nulu počítáme s násobností jeho řádu, se rovná

$$N - P = \frac{1}{2\pi} (\Delta \arg G(p)),$$

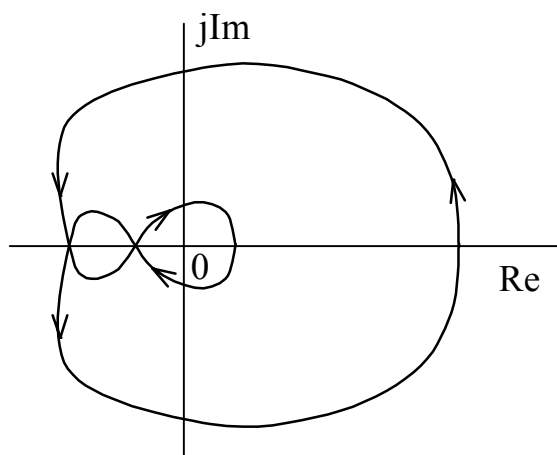
kde $\Delta \arg G(p)$ je přírůstek argumentu funkce $G(p)$ při jednom oběhu hranice oblasti v kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček.

Volíme-li za oblast Θ celou kladnou komplexní polorovinu, je její hranice tvořena imaginární osou s půlobloučky, které se vyhýbají případnými póly a nulám na této ose, a polokružnicí s $R \rightarrow \infty$ ([17]). Na stabilitu pak lze usoudit přímo z trajektorie $G(j\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$. Nyní již můžeme formulovat imitanční kritérium stability (viz [29], [30], [31]).

Věta 5.5: Necht' $G(j\omega)$ je admitance, do které pracuje zdroj napěťové poruchy, resp. $Z(j\omega)$ je impedance, do které pracuje zdroj proudové poruchy. Rovnovážný bod bude vzhledem k této poruše stabilní, pokud hodograf admitance $G(j\omega)$, resp. impedance $Z(j\omega)$ pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ obkrouží počátek komplexní roviny ve směru hodinových ručiček právě N - krát, kde N je počet nulových bodů $G(j\omega)$, resp. $Z(j\omega)$ v pravé komplexní polorovině.

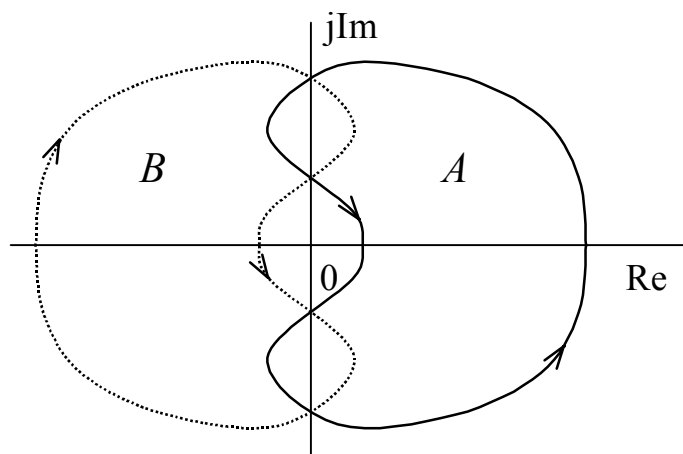
Jsou-li tyto podmínky splněny, je totiž podle věty o argumentu zaručeno, že imitance, do které pracuje zdroj poruchy, nemá žádné póly v pravé komplexní polorovině.

Všimněme si, co říká imitanční kritérium o systémech, které se chovají vůči poruše jako systémy s minimální fází. V tomto případě nebude mít příslušná imitance nulové body v pravé polorovině neboli $N=0$ a hodograf imitance vůbec nesmí obkroužit počátek komplexní roviny. To ovšem neznamená, že by se hodograf nesměl vůbec dostat na zápornou reálnou osu. Příklad takového stabilního systému je znázorněn na obr. 5.1.5.



Obr. 5.1.5: Příklad hodografu stabilního systému s minimální fází

Podle imitančního kritéria by měly být stabilní i oba případy podle obr. 5.1.6. Křivka B však nemůže být realizována bez použití dodatečného fázovacího članku a tudíž neodpovídá žádnému případu obvodu s minimální fází.



Obr. 5.1.6: Stabilní a teoreticky stabilní případy

Zajímavé je fyzikální pozadí imitančního kritéria stability. Integrál

$$\varepsilon_R = \int_0^{\infty} \text{Re}[G(j\omega)] d\omega$$

značí energii, kterou si nevratným způsobem vymění zdroj Diracova impulsu s imitancí G . Tento integrál může být kladný nebo i záporný. Ve druhém případě se zdroj signálu jeví jako spotřebič. Je-li systém stabilní, pak

$$G(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt,$$

kde $g(t)$ je impulsní funkce vyhovující jedné z definičních podmínek Fourierovy transformace (viz [45])

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty,$$

což je zároveň podmínka stability vůči poruše pracující do imitance G . Jde tedy o to, aby integrál ε_R v případě stabilního systému konvergoval, na jeho znaménku nezáleží. Pracuje-li tedy zdroj poruchy na nějaké frekvenci (tj. i při nulové frekvenci) do zbytku obvodu jako do záporné činné zátěže, nemusí to být známkou celkové nestability.

5.1.3 Stejnoseměrné důsledky kritéria

Imitanční kritérium ukazuje spolupráci zdroje poruchy se systémem v celém frekvenčním spektru. Bod hodografu, který odpovídá kmitočtu $\omega = 0$, znamená stejnosměrný odpor nebo vodivost, do které pracuje zdroj poruchy na velmi pomalých kmitočtech. Toto místo křivky tedy ukazuje *odolnost proti pomalu působícím poruchám*, ke kterým dochází vlivem stárnutí součástek, díky teplotním změnám apod. Leží-li tento bod na záporné reálné poloose, znamená to, že mezi svorkami zdroje poruchy se vyskytuje záporný odpor. Znamená však výskyt záporného odporu automaticky nestabilitu?

Všimněme si trajektorie na obr. 5.1.4. Předpokládejme, že posloupnost bodů $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ odpovídá růstu frekvence $-\infty \rightarrow 0^- \rightarrow 0^+ \rightarrow +\infty$. V případě, že imitance má *jeden nulový bod* (tedy reálný) *v pravé polorovině*, daná křivka představuje *stabilní* systém. Místo připojení zdroje poruchy přitom musí zákonitě vykazovat záporný odpor.

Na základě tohoto zjištění lze formulovat následující větu.

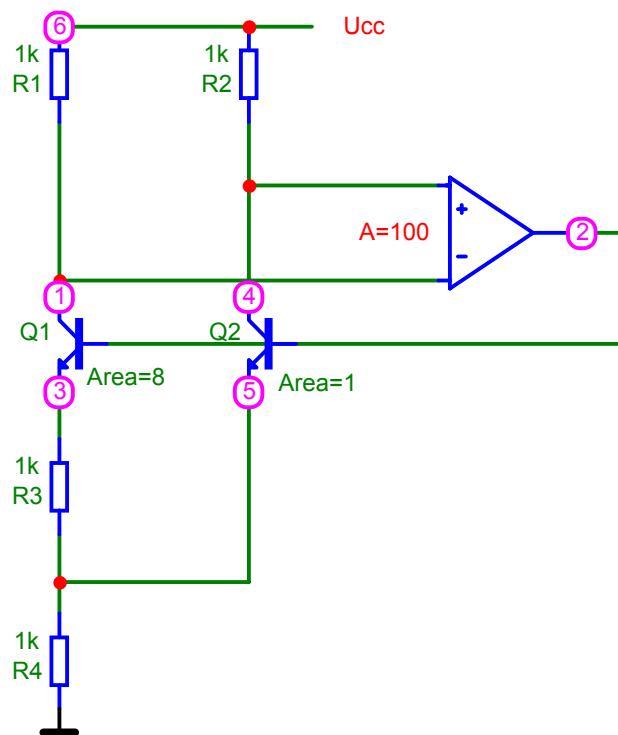
Věta 5.6: Systém nestabilní vůči pomalým poruchám lze stabilizovat jen doplněním na systém s neminimální fází.

Tento problém bude podrobněji rozveden v části 5.1.5.

5.1.4 Aplikace

Brokawova B-G reference

Počítačovými prostředky vyhledáváme pokud možno všechny rovnovážné body obvodu. Na obr. 5.1.7 je schéma band-gap buňky podle Brokawa (viz [18]) s vyznačenými čísly napěťových uzlů. U tohoto obvodu je z praxe známo, že se může po zapnutí dostat do stavu, ve kterém je jako referenční buňka nefunkční.

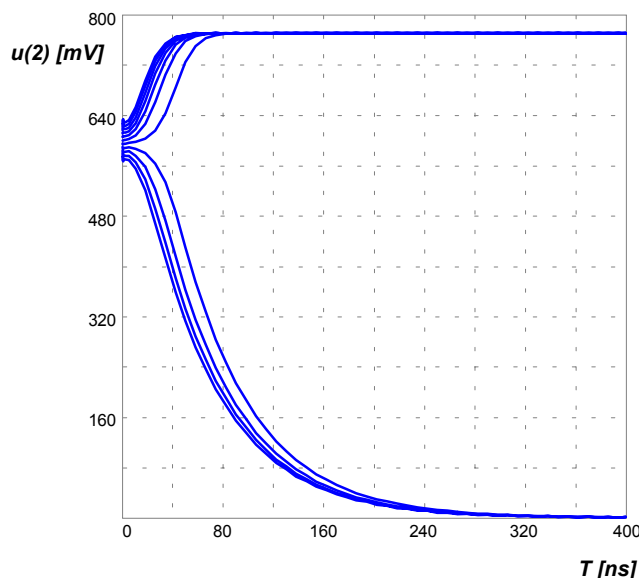


Obr. 5.1.7 Brokawova B-G buňka

Rovnovážné body jsou celkem tři a seznam uzlových napětí pro každý z nich je v následující tabulce (uzel 6 je napájecí a je na něm +10V).

Číslo uzlu	Rovnovážné body (uzlová napětí)		
1	9,993 V	9,950 V	10,0 V
2	601,3 mV	770,4 mV	0,0 V
3	22,1m V	142,0 mV	0,0 V
4	9,999 V	9,958 V	10,0 V
5	11,9 mV	92,1 mV	0,0 V
6	10,0 V	10,0 V	10,0 V

Časová analýza na obr. 5.1.8 ukazuje, že body charakteristické výstupními napětími 770,4 mV a 0 V jsou stabilní, bod s výstupním napětím 601,3 mV je nestabilní. Napěťové průběhy od tohoto bodu „odbíhají“, i když je počáteční odchylka od rovnováhy velmi malá a změny probíhají velmi pomalu.

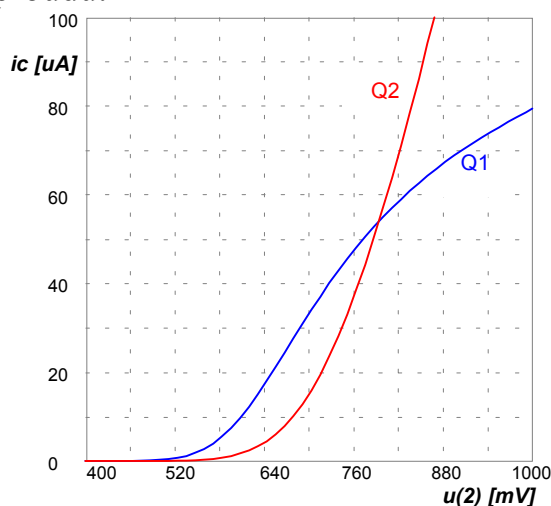


Obr. 5.1.8: Časová analýza band-gap buňky

Je zajímavé, že při DC analýze pomocí obvodového simulátoru byl spočítán pouze DC *nestabilní* bod, body stabilní musely být zjištěny až časovou analýzou.

Existence DC nestabilního bodu není na první pohled vůbec zřejmá a vyplývá až z detailní analýzy poměrů na bázích tranzistorů podle obr. 5.1.9, na kterém jsou naznačeny závislosti kolektorových proudů obou tranzistorů na společném bázevém napětí $u(2)$.

Tranzistor Q_1 má $8\times$ větší plochu emitorového přechodu než tranzistor Q_2 a proto se otevírá „ochotněji“. Tato přednost je vyvážena celkově větším emitorovým odporem, takže obě charakteristiky se setkají při bázevém napětí $u(2)$ přibližně 790 mV, kdy je rozdílové napětí pro chybový zesilovač nulové. Bázevé napětí je zároveň výstupním napětím chybového zesilovače, který zesiluje odchylku úměrnou rozdílu kolektorových proudů.

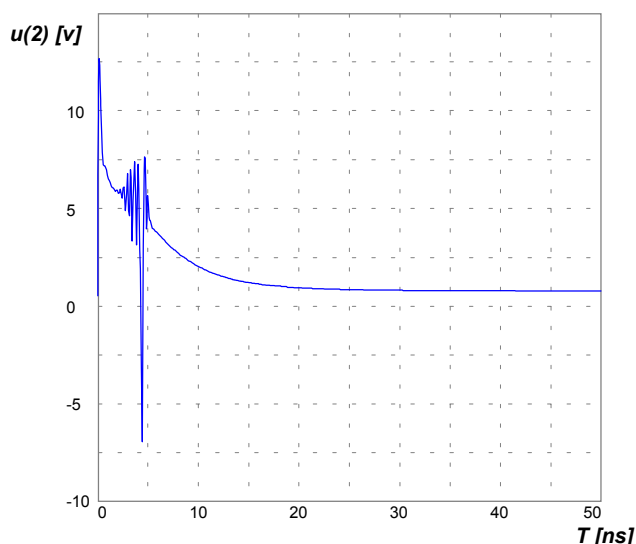


Obr. 5.1.9: Vstupní nelinearity tranzistorů

Stabilní bod s výstupním napětím 770,4 mV je stabilizován tak, že fluktuace tohoto napětí směrem nahoru snižuje rozdíl kolektorových proudů a tím klesne napětí na diferenčním vstupu zesilovače. Fluktuace se vyrovná snížením bázevého

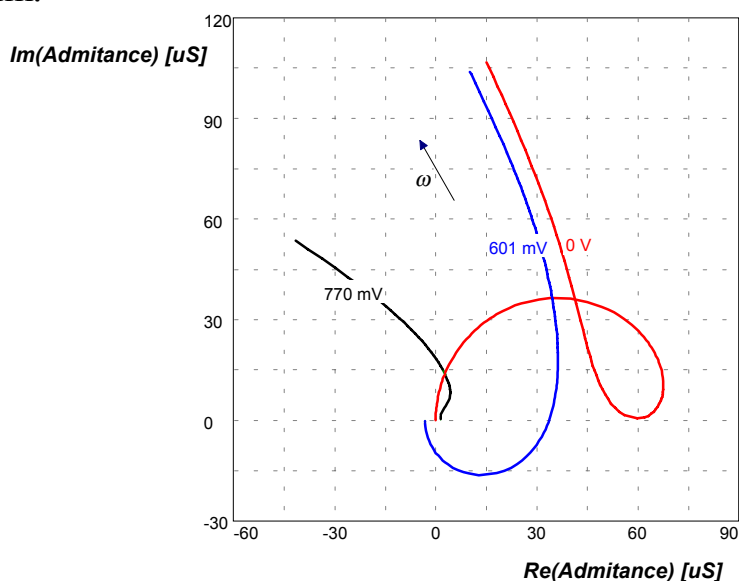
napětí. Podobně je možno vysledovat funkci zpětnovazebního mechanismu při opačné fluktuaci. Z tvaru charakteristik můžeme také odvodit stabilitu bodu s bázovým napětím 0V i nestabilitu bodu s bázovým napětím 601,3 mV. DC nestabilita je způsobena tvarem nelinearity.

DC nestabilní bod má vliv na dynamiku obvodu a projeví se vždy, když se do jeho blízkosti dostane trajektorie např. při zapnutí, jak ukazuje obr. 5.1.10 (pro bližší rozbor viz část 5.2.9).



Obr. 5.1.10: Náběh B-G buňky

Skrytý DC nestabilní bod se projeví při náběhu, kdy v kombinaci s vlastní dynamikou musí průběh trajektorie překonávat potenciálový val disipační funkce. Odpudivá síla s tím spojená se projeví také při pomalém náběhu, kdy se pozvolna zvyšuje napájecí napětí a systém skončí v opačném stabilním bodě, tj. s nulovým výstupním napětím.



Obr. 5.1.11. Charakteristiky pracovní vodivosti zesilovače

Nyní můžeme provést na tomto nelineárním obvodu test na stabilitu imitančním kritériem pro každý rovnovážný stav zvlášť. Na obr. 5.1.11 jsou znázorněny frekvenční charakteristiky admitance, do které pracuje zdroj fluktuace umístěný do výstupu chybového zesilovače.

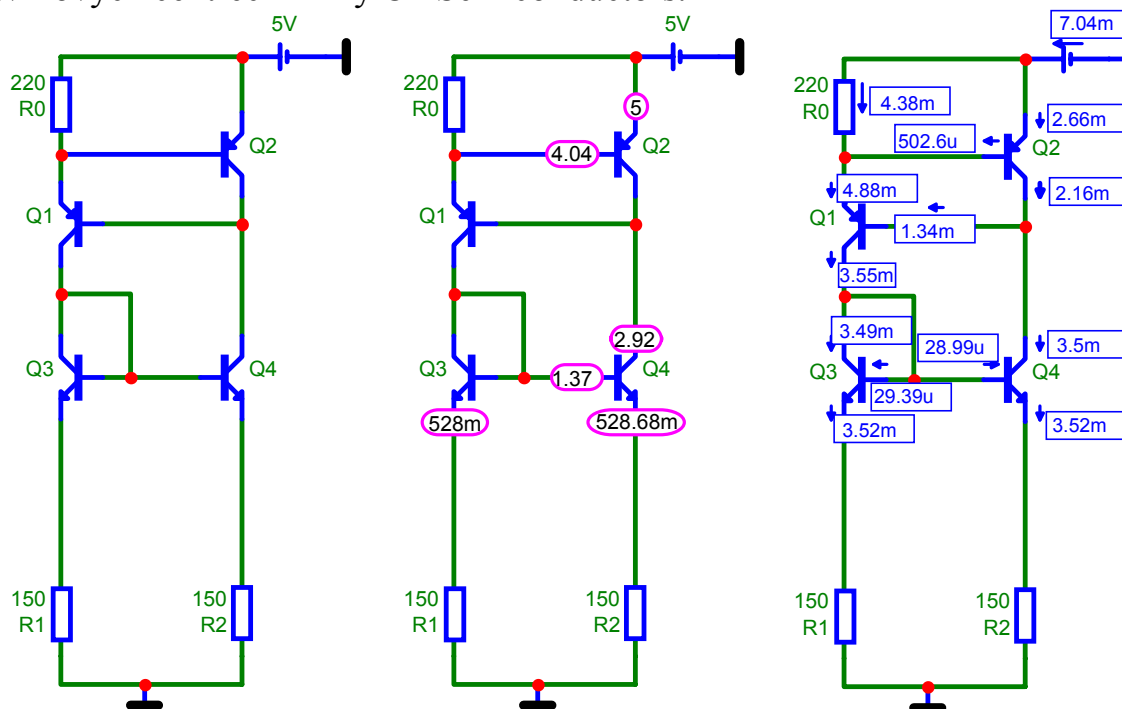
Křivka pro výstupní napětí 601 mV začíná na záporné reálné ose, což indikuje zápornou stejnosměrnou vodivost a tedy DC nestabilitu. Ostatní dva průběhy ukazují na DC i klasickou stabilitu. Křivka pro výstupní napětí 0 V začíná sice v počátku souřadnic, avšak na stabilitu můžeme usoudit z dalšího průběhu pro vyšší frekvence (není uvedeno na obr. 5.1.11). Využijeme-li přitom plného znění imitančního kritéria, zjistíme u daného pracovního bodu stabilitu.

Všechny výsledky jsou v plné shodě s výsledky časové analýzy, která je zdokumentována na obr. 5.1.8.

Integrovaný zdroj proudu

Jako další aplikaci na imitanční kritérium si ukážeme vyšetření stability zdroje proudu používaného v integrovaných strukturách (viz [33], [53]), u kterého je také známo, že se u něj vyskytují problémy s kmitáním při určitých hodnotách parazitních reaktancí. Na obr. 5.1.12 je schéma zapojení spolu s vyznačenými hodnotami uzlových napětí a větвовých proudů v daném pracovním bodě.

Byl použito poměrně netradičního návrhu zdroje s cílem dosáhnout spolehlivé funkce při širokém rozmezí napájecích napětí. Proto bylo žádoucí vykonat předběžný test na stabilitu zapojení. K analýze byla použita metodika imitančního kritéria a využilo se programu pro analýzu obvodů MicroCap VI. Byly vybrány standardní modely tranzistorů používané při profesionálních simulacích v návrhových centrech firmy On Semiconductors.



Obr. 5.1.12: Vyšetřovaný pracovní bod

Byly užity následující modely tranzistorů:

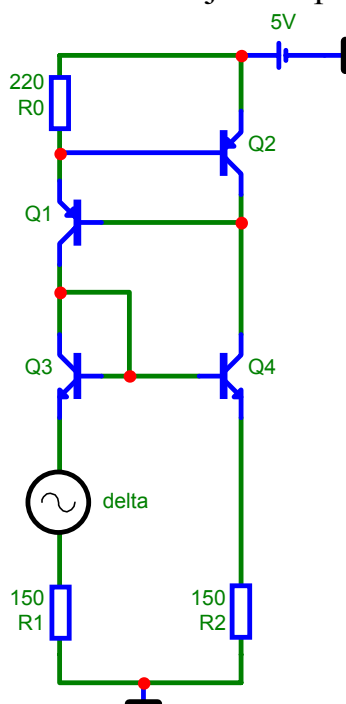
*** NORMAL NPN (EMITTER AREA 16um x 16um)

.MODEL NORMAL NPN (IS=1.700000E-016 BF=156 VAF=125 IKF=19M ISE=2.3F NE=1.56 BR=4 NR=992M VAR=13.9 IKR=960M ISC=8.800000E-016 NC=1.016 RE=3.1 RB=1.14K RBM=120 IRB=300U RC=112 CJE=399F VJE=950M MJE=490M CJC=270F VJC=640M MJC=460M XCJC=280M CJS=1.08P VJS=560M MJS=390M TF=272P TR=20N EG=1.2 XTB=900M XTI=2.3)

*** LATERAL PNP (EMITTER AREA 16x16 um)

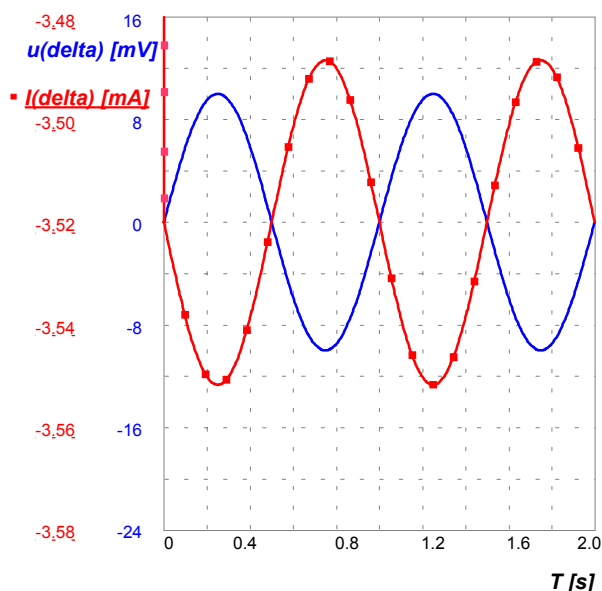
.MODEL LATERAL PNP (IS=2.600000E-016 BF=164 NF=993M VAF=59 IKF=69U ISE=2.200000E-016 NE=1.27 BR=290M NR=993M VAR=25 IKR=27M ISC=10F NC=1.42 RE=21.9 RB=100 IRB=1 RC=600 CJE=150F VJE=730M MJE=460M CJC=653F VJC=650M MJC=480M TF=27.3N TR=50N EG=1.195 XTB=900M)

Umístíme-li do emitoru tranzistoru Q₃ zdroj harmonické napěťové poruchy „delta“ nízkého kmitočtu (1Hz) a malé amplitudy (10mV) podle obr. 5.1.13, zjistíme, že zbytek obvodu se vůči ní chová jako záporný odpor $R \doteq -318 \text{ } \Omega$.



Obr. 5.1.13: Vložení testovacího zdroje

Výskyt záporného diferenciálního odporu se obvykle spojuje s nestabilitou stavu, avšak daný pracovní bod je stabilní, jak ukazuje obr. 5.1.14. Proudová odezva na harmonický napěťový signál má charakter *ustálených* kmitů kolem střední hodnoty 3,52 mA (srovnej s obr. 5.1.12), přičemž napětí a proud jsou v *protifázi*. Testovací zdroj funguje jako *spotřebič* s nulovým účínkem.



Obr. 5.1.14: Proudová reakce na napěťové buzení

Podle obr. 5.1.14 je patrné, že zbytek obvodu zpočátku reaguje na velmi pomalou změnu napětí v emitorové větvi rychlým proudovým impulsem. To ukazuje na výskyt nulového bodu celkové admitance zbytku obvodu. Díky tomu pracuje zdroj napěťové odchylky zpočátku ve zdrojovém režimu, tj. dodává do obvodu výkon na vysoké frekvenci. Na nízké frekvenci se pak stává spotřebičem. Je tedy zřejmé, že o stabilitě nebo nestabilitě nerozhoduje pouze stejnosměrná složka admitance, ale celé její frekvenční spektrum.

K testu stability vůči poruše „delta“ použijeme imitančního kritéria. Bude zajímavé si nejdříve zjistit, zda obvod nemá nulové body v pravé komplexní polorovině.

Obvod z obr. 5.1.13 byl linearizován kolem vyšetřovaného pracovního bodu a byly určeny h-parametry tranzistorů takto:

	h_{11} [Ω]	h_{12} [-]	h_{21} [-]	h_{22} [S]
Q1	169.7	1390 μ	1.299	62 μ
Q2	221.3	813 μ	2.164	37.1 μ
Q3	2087	134 μ	102.7	33.5 μ
Q4	2096	90.74 μ	104.1	29.27 μ

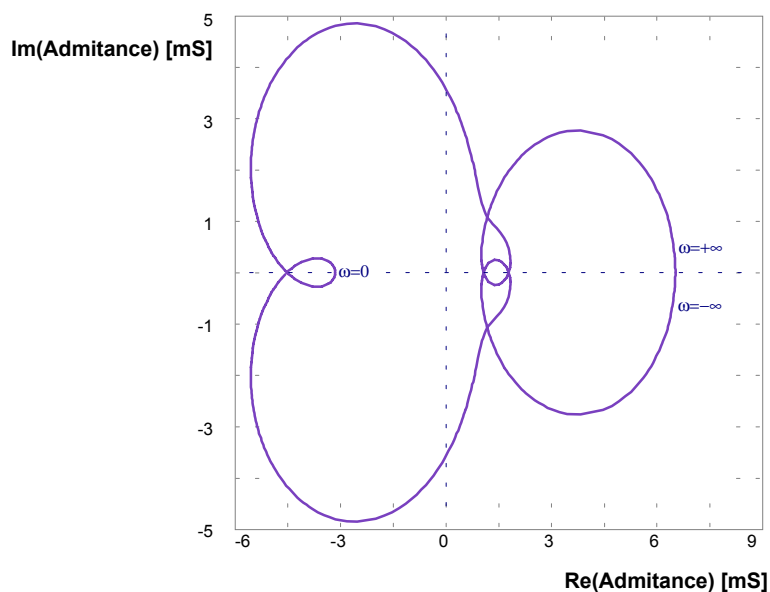
Dynamika obvodu byla respektována modelováním kapacit přechodů kolektor-báze podle modelů uvedených výše. Za těchto zjednodušení vyšly póly a nuly admitance zbytku obvodu takto (k výpočtu byl použit program pro symbolickou analýzu SNAP):

$$p_1 = -2.883 \cdot 10^{10}, \quad p_2 = -1.343 \cdot 10^9,$$

$$n_1 = -2.525 \cdot 10^{10}, \quad n_2 = +1.020 \cdot 10^9.$$

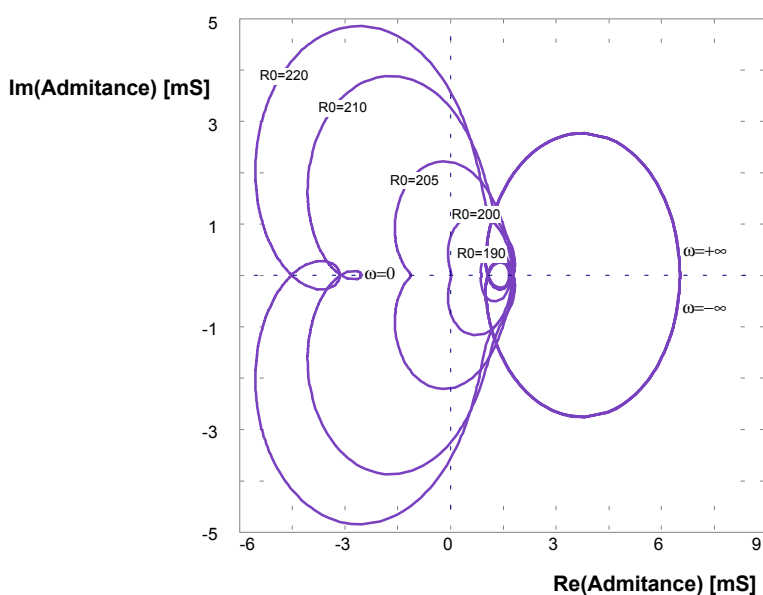
Poloha pólů ukazuje na stabilitu. Kladný nulový bod ukazuje na to, že trajektorie admitance by měla obkroužit počátek komplexní roviny jedenkrát ve směru hodinových ručiček. Tomu odpovídá graf na obr. 5.1.15, který je výsledkem

simulace respektující složitější modelování tranzistorů podle výše uvedených modelů SPICE.



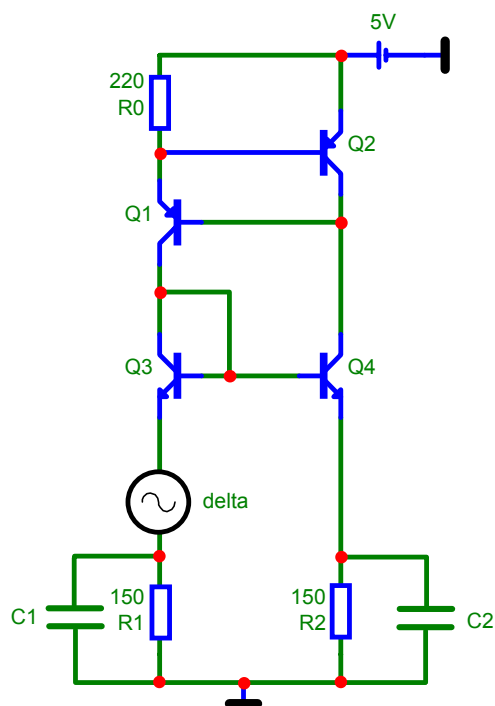
Obr. 5.1.15: Hodograf admittance

Obr. 5.1.16 ukazuje vliv odporu R_0 . Pro $R_0 > 200 \text{ } \Omega$ bude zbytek obvodu vykazovat zápornou diferenciální vodivost (záporný odpor), ale zapojení zůstane stabilní. To je možné díky nulovému bodu v pravé komplexní polorovině.



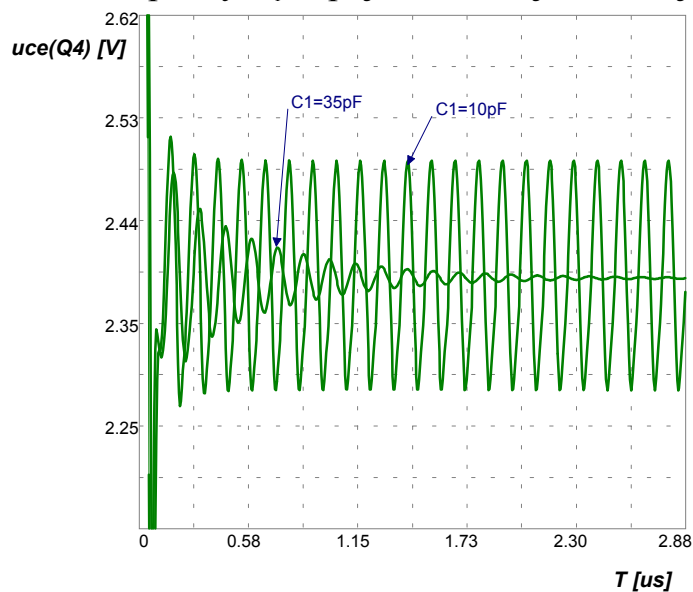
Obr. 5.1.16: Vliv odporu R_0

Obvod je přesto za jistých okolností náchylný ke kmitání. Na obr. 5.1.17 je model zdroje rozšířen o kapacity emitorových odporů. Uvažujeme-li $C_2 = 200 \text{ pF}$, je zapojení stabilní při $C_1 > 30 \text{ pF}$.



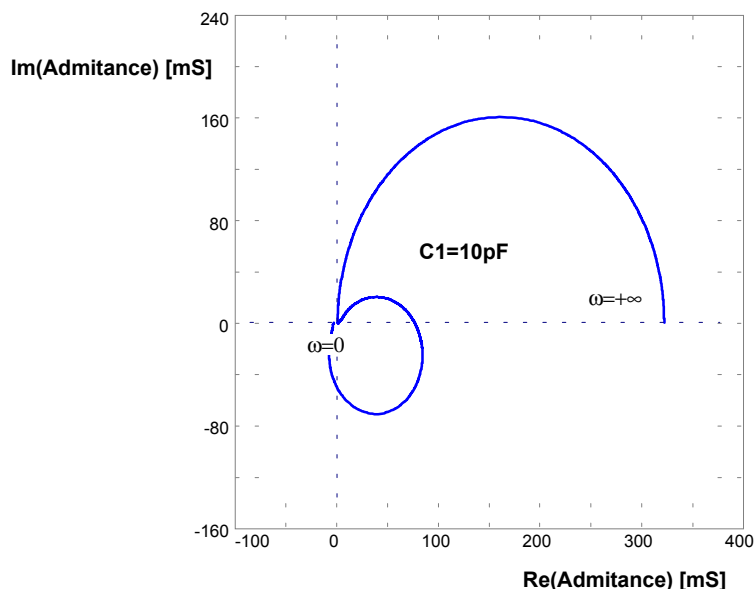
Obr. 5.1.17: Vliv kapacit emitorových odporů

Při menších hodnotách kapacity C_1 zapojení kmitá, jak ukazuje obr. 5.1.18.



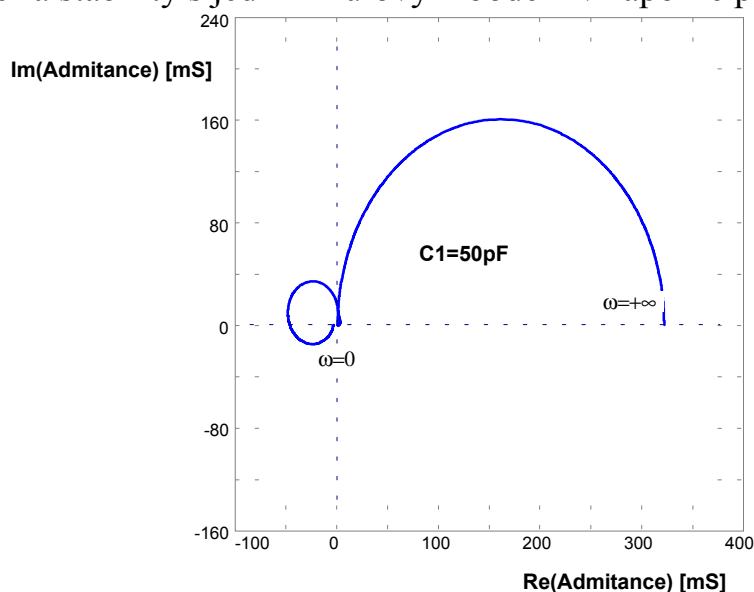
Obr. 5.1.18: Náběhy zdroje

Obr. 5.1.19 ukazuje hodograf admitance pro $C_1 = 10 \text{ pF}$, kdy zapojení kmitá. V tomto případě oběhne průvodič počátek komplexní roviny jednou *proti* směru hodinových ručiček, což ukazuje na nestabilitu.



Obr. 5.1.19: Nestabilita

Naproti tomu případ $C_1 = 50 \text{ pF}$ podle obr. 5.1.20 ukazuje na stabilitu, protože průvodič oběhne počátek jednou ve směru hodinových ručiček, což souhlasí podle imitančního kritéria stability s jedním nulovým bodem v záporné polorovině.

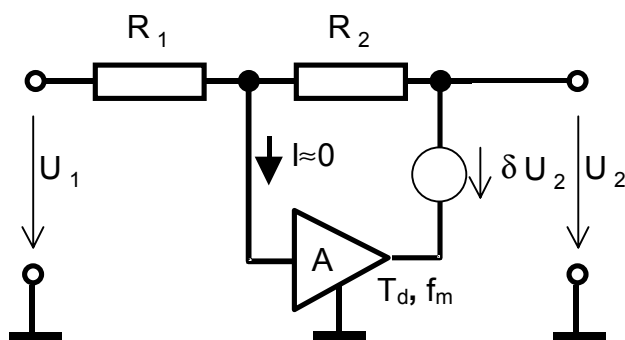


Obr. 5.1.20: Stabilita

Tyto analýzy potvrzují nutnost provádět při realizaci zapojení opatření vedoucí ke zvětšení zásoby stability daného pracovního bodu. V tomto konkrétním případě by to mohlo znamenat posílení nesymetrie mezi kapacitami C_1 a C_2 připojením kapacitoru k jednomu z emitorových odporů (obr. 5.1.17).

Zesilovač s dopravním zpožděním

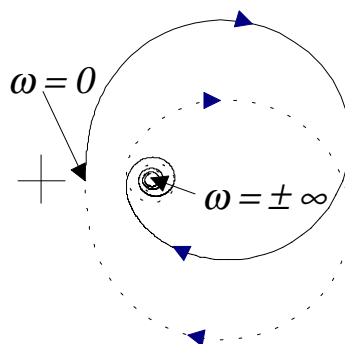
Uvažujme zapojení s napěťovým zesilovačem podle obr. 5.1.21.



Obr. 5.1.21: Obvod s dopravním zpožděním

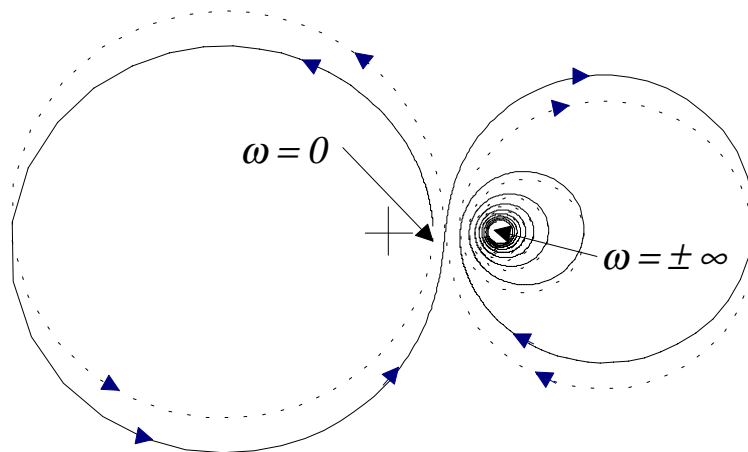
Zesilovač má vlastní dynamiku danou kmitočtem zlomu f_m (odpovídá poklesu zesílení o 3 dB), který odpovídá zápornému pólu struktury. Kromě toho necht' se u zesilovače vyskytuje nepatrné dopravní zpoždění T_d . Bude nás zajímat, do jaké imitance budou pracovat případné fluktuace výstupního napětí.

Necht' $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, zesílení $A = -3$ a zpoždění $T_d = 10 \text{ ps}$. Pro $f_m = 15 \text{ GHz}$ je trajektorie výstupní admitance představena na obr. 5.1.22, čárkovaně je vyznačena křivka se zápornými hodnotami parametru ω . Aplikací imitančního kritéria lze zjistit stabilitu obvodu vůči fluktuaci výstupního napětí. Protože trajektorie vůbec neobkrouží počátek souřadné soustavy, zapojení vychází jako *stabilní*.



Obr. 5.1.22: Trajektorie pro $A = -3$, $f_m = 15 \text{ GHz}$

Zvětšíme-li šířku pásma zesilovače na 70 GHz, situace se změní, jak ukazuje obr. 5.1.23. Vzhledem k tomu, že trajektorie oběhne počátek souřadnic $2\times$ proti směru hodinových ručiček, musí být obvod vzhledem k fluktuaci výstupního napětí *nestabilní*.

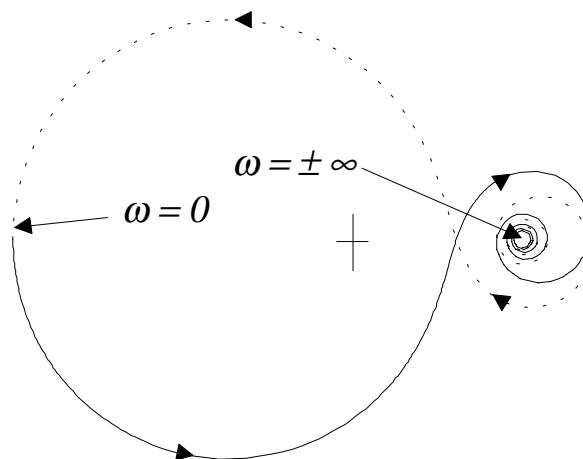


Obr. 5.1.23: Trajektorie pro $A = -3, f_m = 70$ GHz

Analýzou získaných výsledků můžeme dospět k obecnému závěru týkajícímu se tzv. záporné zpětné vazby. Bližší rozbor problému totiž ukazuje, že při hodnotách zesílení $A < -1$ je stabilita zapojení podle obr. 5.1.21 ohrožena. Stabilitu musí v těchto případech zajišťovat setrvačnost zesilovače, tj. omezená šířka pásma.

Vysvětlení je prosté. Nebezpečí pro stabilitu vzniká na vysokých kmitočtech, při kterých se dopravní zpoždění projeví jako fázovací člen činící z původně „záporné“ zpětné vazby vazbu „kladnou“. Není-li signál s takovýmto kmitočtem zpětnovazební smyčkou utlumen, zapojení se rozkmitá.

Pro zesílení $A > 1$ je zapojení přirozeně také nestabilní. Na obr. 5.1.24 je ukázána trajektorie pro $A = +3, T_d = 10$ ps a $f_m = 15$ GHz. Trajektorie obkrouží počátek souřadné soustavy $1 \times$ proti směru hodinových ručiček, obvod je tedy vůči fluktuaci výstupního napětí nestabilní.



Obr. 5.1.24: Trajektorie pro $A = +3, f_m = 15$ GHz

Pro stabilitu je tedy vysoké zesílení zpětnovazební smyčky vždy nebezpečné, ať už má jakékoli znaménko. Uvážíme-li už z principu nenulové zpoždění při průchodu signálu jakýmkoliv obvodem, pak to, že zpětná vazba je „záporná“, v žádném případě není automaticky zárukou stability. U takových obvodů je stability dosahováno omezenou šířkou pásma, která je vlastní všem reálně existujícím systémům.

5.1.5 Frekvenční představy o DC stabilitě

Vraťme se nyní k pojetí DC obvodu jako k obvodu „ochuzenému“ o reaktanční prvky. Na základě imitančního kritéria prozkoumáme další možnost, jak si představit pojem DC stability.

DC obvod se většinou chápe jako limitní případ reálného obvodu s reaktančními prvky, ve kterém „pošleme“ vektor reaktančních parametrů k nule. Výhodou tohoto pojetí je to, že vyjadřuje přesně to, co si intuitivně pod DC obvodem představujeme. V rovnovážném stavu se skutečně reaktanční prvky neuplatňují. Všechny klidové stavy jsou řešením algebraických rovnic obvodu, ve kterém zkratujeme indukory a rozpojíme kapacitory. Potíž je však v tom, jak „poslat vektor reaktančních parametrů k nule“.

Zanedbávání parametrů vede k potížím, které jsou v modelování velmi dobře známy. Postupně degraduje řád systému a tím se mění skokově jeho vlastnosti. Navíc obecně záleží na směru, ze kterého se vektor parametrů blíží k nule, takže DC obvod jako limita dokonce nemusí ani existovat. Navíc téměř vždy považujeme hodnoty většiny parazitních reaktancí a priori za nulové. To však znamená, že již v této počáteční fázi analýzy startujeme proces limitního přechodu vektoru reaktančních parametrů k nule, a to mnohdy velice nešťastným způsobem. Zanedbáním parazitní kapacity nebo indukčnosti můžeme totiž hned na počátku vyloučit právě ten jediný podstatný parametr, který zapříčiňuje nestabilitu. „Zanedbání“ parametru s podstatným vlivem na stabilitu navíc vytváří obtížně vysvětlitelné paradoxy způsobené tím, že nejsou splněny předpoklady pro použití kritéria stability (viz např. [19], [20], [21]).

Limitní proces prostřednictvím vektoru reaktančních parametrů přináší mnoho nových problémů. Na základě výsledků plynoucích z imitančního kritéria stability lze definovat DC obvod na základě jiné limity, která je zcela jednoznačná. Je to limita pouze jednoho parametru. Jedná se o *frekvenční* přechod $f \rightarrow 0$. Pro pomalé frekvence indukory skutečně tvoří zkraty a všechny kapacitory jsou přerušeny. Z hlediska klasické stability a imitančního kritéria by se tedy mohlo zdát, že DC stabilita se dá definovat jako schopnost odolávat *pomalým* poruchám. Skutečnost je však trochu složitější.

Viděli jsme, že schopnost odolávat pomalým poruchám může být obvodu vrácena jeho doplněním o reaktance na obvod s neminimální fází. Znamená to, že na této schopnosti spolupracují jak klasické, tak termodynamické principy. To, co nezvládají stejnosměrné regulační mechanismy, zastanou pak mechanismy klasické. Příkladem je aplikace integrovaného zdroje proudu uvedená v části 5.1.5. Kdyby se dané zapojení oprostilo o některé parazitní reaktance, stal by se obvod nestabilním, protože by se projevila neschopnost *stejnosměrného* obvodu vyrovnat se s *libovolně rychlou* poruchou. V posledním výroku je třeba hledat zárodek definice DC stability, která vlastně znamená *schopnost DC mechanismů vyrovnat se s poruchou*. Taková definice může být vystavěna pouze na základě termodynamiky, která tyto mechanismy objasňuje (viz část 5.2.1).

Větu 5.6 lze tedy doplnit o další poznatek, zformulovaný do další věty:

Věta 5.7: Obvod DC nestabilní nelze stabilizovat jeho rozšířením o reaktanční prvky v rámci obvodů s minimální fází.

Z DC nestability tedy nevyplývá skutečná nestabilita.

Věta 5.8: Obvod DC stabilní lze jeho rozšířením o reaktance destabilizovat.

Z DC stability opět nevyplývá skutečná stabilita.

5.2 Termodynamické kritérium

5.2.1 Základní představy

Zatím jsme nashromáždili dostatek důkazů k závěru, že skutečné stability je dosahováno na základě spolupráce newtonovských a termodynamických principů. V části 5.1.5 jsme se snažili definovat DC stabilitu a zjistili jsme, že nemáme prostředky k popisu onoho stejnosměrného regulačního mechanismu, který ke skutečné stabilitě přispívá. Vyjdeme-li z poznatků obsažených v části 4.3, můžeme začít cestu k termodynamickému kritériu tím, že definujeme DC systém nezávisle na klasických přístupech z *termodynamického* hlediska.

Definice 5.2: DC obvod je termodynamický systém popsáný zobecněnými toky I (elektrické proudy) a zobecněnými silami U (elektrická napětí).

Výhoda tohoto pojetí DC obvodu je v tom, že se zcela omejdeme bez reaktančních prvků a bez klasické dynamiky. Jak uvidíme později, místo ní nastoupí tzv. virtuální dynamika založená na variaci obvodových veličin a energetickém přístupu, který vychází z principu minimální produkce entropie platného pro termodynamické systémy.

V části 4.3 jsme viděli, že pohyb v termodynamických systémech se děje podle gradientu disipačního potenciálu. Jakákoli fluktuace vybočující z tohoto statistického zákona je likvidována. Tento regulační mechanismus se promítá do definice DC stability.

Definice 5.3: Stejnosměrná (DC) stabilita je schopnost DC obvodu vyrovnat se s poruchou.

Pokud je systém stabilní, tj. dokáže se vyrovnat s poruchou, nemusí být ještě DC stabilní. To by byl případ, kdy by samotné termodynamické síly nedokázaly stabilitu zajistit bez pomoci sil newtonovských.

Mějme DC obvod získaný linearizací kolem zkoumaného rovnovážného bodu. Zvolme k jeho analýze některou z metod založených na napěťovém popisu, např. metodu uzlových párů nebo uzlových napětí. Pak lze jeho obvodové rovnice napsat ve tvaru

$$\underline{G} \cdot \vec{U} = \vec{I}, \quad (5.1)$$

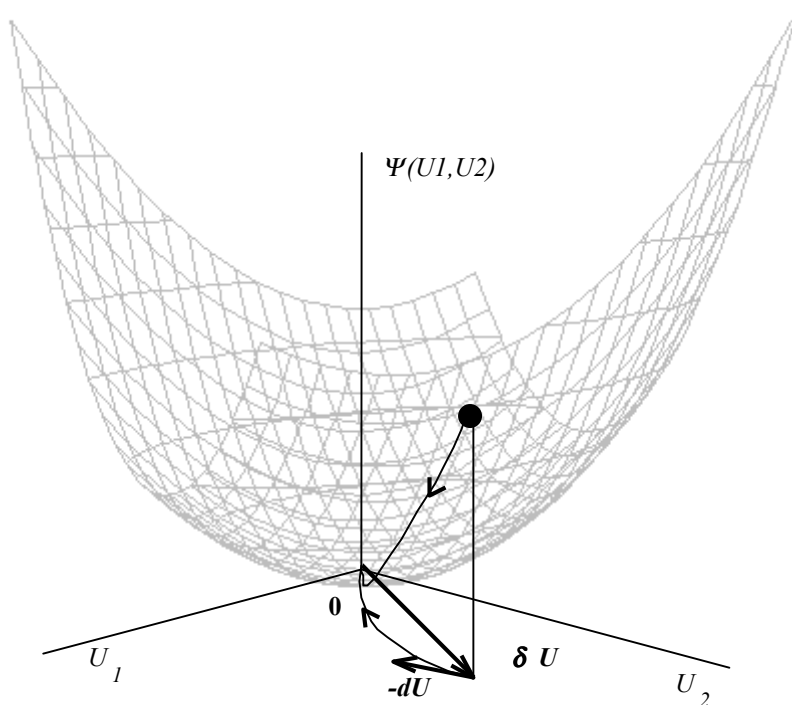
kde \underline{G} je diferenciální vodivostní matice, \vec{U} jsou uzlová napětí nebo napětí uzlových párů a \vec{I} je proudové buzení. Pokud je matice \underline{G} symetrická, je rovnice (5.1) jednou z konstitučních pohybových rovnic (4.20) termodynamického systému. Disipační potenciál bude mít podle části 4.3.2 podobu kvadratické formy

$$\Psi(\vec{U}) = \frac{1}{2} \vec{U}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{U}.$$

V tomto obvodu se naplňuje princip $[\Psi(\vec{U})]_{\vec{U}} = MIN$. Na obr. 5.2.1 je zobrazena plocha disipačního potenciálu s minimem v rovnovážném bodě, který odpovídá počátku napěťových souřadnic. Proudová fluktuační vychýlila systém do stavu $\delta \vec{U}$. Podle zákona o minimální produkci entropie systém „zvolí“ ze všech možných pokračování takovou trajektorii $d\vec{U}$, aby minimalizoval hodnotu disipačního potenciálu. Trajektorie tedy musí pokračovat *proti směru gradientu* Ψ , tj. do nového bodu $\delta \vec{U} - d\vec{U}$, kde $d\vec{U} = k \cdot \text{grad}_{\vec{U}} \Psi = k \cdot \underline{G} \cdot \delta \vec{U}$, k je kladná konstanta. V novém bodě platí tentýž zákon, podle kterého se dostaneme do dalšího bodu trajektorie. Takto se pokračuje až do místa lokálního minima disipačního potenciálu.

Trajektorie vyhovující principu minimální produkce entropie ukazuje skutečné tendence termodynamického pohybu. Je výsledkem termodynamického regulačního mechanismu, který působí proti poruše. Budeme jí říkat termodynamická nebo virtuální trajektorie.

Výše uvedeného principu minimální produkce entropie je využito i v algoritmech pro vykreslování virtuální trajektorie uvedených v Příloze A a Příloze B.



Obr. 5.2.1: Virtuální trajektorie

Parametrickou rovnici virtuální trajektorie lze získat z integrální rovnice

$$\vec{U}(s') = \delta \vec{U} - \int_0^{s'} k \cdot \underline{G} \cdot \vec{U}(\xi) d\xi,$$

kde s' je parametr křivky. Diferencováním této rovnice a substitucí $s = k \cdot s'$ dostaneme diferenciální rovnice virtuální trajektorie

$$\frac{d\vec{U}(s)}{ds} = -\underline{G} \cdot \vec{U}(s). \quad (5.2)$$

I když je rovnice (5.2) pohybovou rovnicí ryze stejnosměrného systému, parametr s nemusí být čas. Tato rovnice vyjadřuje *tendence* systému a obsahuje informaci o celé síti virtuálních trajektorií kolem rovnovážného bodu. Je DC analogií známého tvaru stavové rovnice (lit. [9])

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \underline{A} \cdot \vec{X}(t)$$

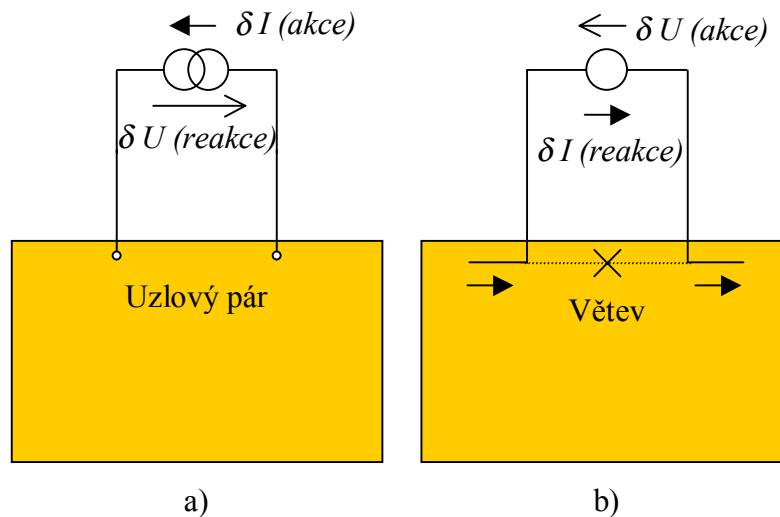
a analogická jsou i jejich řešení.

5.2.2 Odvození kritéria

Pro stabilitu virtuálních trajektorií je nutné a postačuje, aby všechny končily v rovnovážném bodě. S uvážením vztahu (5.2) lze formulovat kritérium DC stability. Předpokládejme, že obvod je po linearizaci kolem zkoumaného rovnovážného bodu. Uvažujme zdroje odchylek rozmístěné podle obr. 5.2.2. V případě a) jsou to proudové fluktuace působící mezi napěťovými uzly a v případě b) napěťové fluktuace vřazené do větví obvodu. Počet zdrojů odchylek není důležitý. Za těchto předpokladů lze formulovat následující kritérium.

Věta 5.9: Necht' v lineárním obvodu působí zdroje proudových fluktuací $\delta \vec{I}$ (napěťových fluktuací $\delta \vec{U}$), na které obvod zpětně reaguje ve smyslu zdrojové orientace napětími $\delta \vec{U}$ (proudy $\delta \vec{I}$). Necht' $\underline{G} \cdot \delta \vec{U} = \delta \vec{I}$ ($\underline{R} \cdot \delta \vec{I} = \delta \vec{U}$) a imitanční matice je symetrická. Obvod je *DC stabilní vůči fluktuacím* $\delta \vec{I}$ ($\delta \vec{U}$) právě tehdy, má-li vodivostní matice \underline{G} (odporová matice \underline{R}) všechna vlastní čísla kladná.

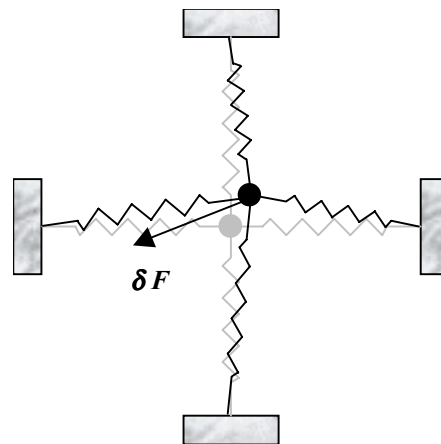
Je zřejmé, že obvod DC stabilní vůči některým fluktuacím nemusí být DC stabilní vůči jiným fluktuacím. DC nestabilita vůči fluktuaci však znamená DC nestabilitu obecně.



Obr. 5.2.2: DC stabilita vůči fluktuaci

V této větě není nutné uvažovat komplexní vlastní čísla, neboť symetrická matice, jejíž prvky jsou reálné, má všechna vlastní čísla také reálná.

Toto kritérium bychom potřebovali zobecnit na nerekiprocitní obvody. Většina zajímavých aplikací totiž obsahuje nerekiprocitní prvky typu řízených zdrojů apod., kdežto reciprocitní systémy jsou z hlediska stability triviální. Nejprve si však ukážeme, že pro nerekiprocitní obvody platí v nezměněné podobě myšlenka virtuální trajektorie. Celá věc se dá vysvětlit na mechanické analogii kuličky v silovém poli podle obr. 5.2.3.



Obr. 5.2.3: Mechanická analogie - kulička v silovém poli

Kulička držaná pružinami ve směrech x a y je vychýlena z rovnovážné polohy o výchylku $\delta \vec{q} = [\delta x \ \delta y]^T$. V této poloze na ni působí síla $\delta \vec{F} = [\delta f_x \ \delta f_y]^T$, která ji buď vrací do původní polohy nebo naopak urychluje pryč. To záleží na charakteru silového pole neboli na matici tuhosti pružin \underline{K}

$$\delta \vec{F} = \underline{K} \cdot \delta \vec{q}.$$

Rozepsáním rovnice dostaneme

$$\delta F_x = k_{11} \cdot \delta x + k_{12} \cdot \delta y,$$

$$\delta F_y = k_{21} \cdot \delta x + k_{22} \cdot \delta y.$$

Směr pohybu kuličky je dán směrem výsledné působící síly pružin. To platí i tehdy, je-li matice \underline{K} nesymetrická. Obr. 5.2.4 ukazuje nesymetrickou situaci pro $k_{11} = 8$, $k_{12} = -5$, $k_{21} = 3$ a $k_{22} = 5$. Trajektorie proložená silovým polem ukazuje dráhu, po které by zřejmě kulička proběhla, kdyby měla zanedbatelnou hmotnost. Protože pole ukazuje *tendence* a ne skutečný pohyb, který může být změněn dynamikou systému, lze vzniklé trajektorie považovat za analogie virtuálních trajektorií termodynamiky.

Směr pohybu termodynamického systému je dán směrem termodynamických sil vyplývajících z principu minimální produkce entropie. Vyjdeme-li z napěťového popisu obvodu podle obr. 5.2.2 a), pak termodynamická síla, která je reakcí na výchylku $\delta \bar{U}$ a určuje další směr pohybu, je $\delta \bar{I}$ a změna souřadnice je $d\bar{U} = k \cdot \delta \bar{I}$. Výsledná trajektorie proložená tímto silovým polem ukazuje pohyb termodynamického systému, ve kterém chybí jakékoli reaktance. Rovnice virtuální trajektorie lze tedy získat i pro nesymetrickou imitanční matici řešením rovnice 5.2.

Z předchozí úvahy vyplývá, že likvidaci nebo další rozvoj fluktuace zabezpečují proudy $\delta \bar{I}$ mezi napěťovými uzly. Tyto proudy se mohou v reálném případě uzavírat přes parazitní kapacity C_i mezi uzlovými páry (viz obr. 2.5.2 a)), maticově $\underline{C} = \text{diag}[C_i]$. Pak je skutečná trajektorie dána řešením rovnice

$$\underline{C} \cdot \dot{\bar{U}} + \underline{G} \cdot \bar{U} = \bar{I}.$$

Lze snadno ukázat, že jsou-li parazitní kapacity shodné, pak je skutečná trajektorie systému totožná s trajektorií virtuální. Na tvar skutečné trajektorie mají tedy primární vliv tendence vyplývající z termodynamické podstaty DC obvodu, reaktanční prvky tyto trajektorie dodatečně modifikují a v některých případech mohou způsobit dokonce nestabilitu daného stavu.

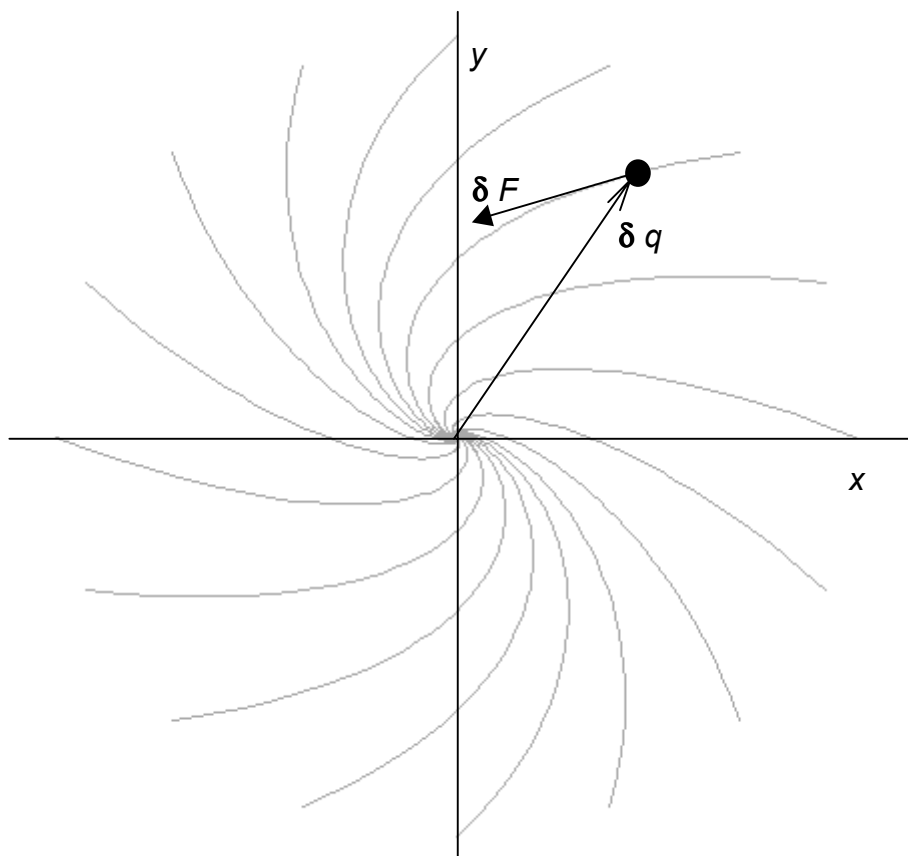
Jestliže imitanční matice jednoznačně určuje tvar virtuálních trajektorií, ať už je symetrická či nikoliv, musí v sobě také obsahovat informaci o DC stabilitě. Než se dostaneme k obecnému kritériu DC stability neboli způsobu, jak tuto informaci z imitanční matice získat, prozkoumejme ještě, zda platí princip minimální produkce entropie také pro nereziprocity systémy.

Princip minimální produkce entropie byl původně formulován pro systémy, u kterých se předpokládá, že transformační matice mezi termodynamickými silami a toky je *symetrická*, tj. platí Onsagerovy relace reciprocity. V případě nesymetrie této matice vznikají potíže s definicí disipačního potenciálu. Nenáročnou úvahou zjistíme, že např. následující potenciál typu kvadratické formy nezmění svou hodnotu, jestliže zachováme součty $G_{ij} + G_{ji}$ za cenu jakéhokoli porušení symetrie

$$G_{ij} = G_{ji}.$$

Platí totiž

$$\Psi(\bar{U}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} G_{ij} U_i U_j = \frac{1}{2} \sum_{i=j} G_{ij} U_i U_j + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} G_{ij} U_i U_j = \frac{1}{2} \sum_i G_{ii} U_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} (G_{ij} + G_{ji}) U_i U_j.$$



Obr. 5.2.4: Virtuální trajektorie nerecipročního systému

Za předpokladu $G_{ij} \neq G_{ji}$ pak už to není potenciál, neboť obecně

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{U}^T} \neq \underline{G} \cdot \vec{U}.$$

V dané souřadné soustavě, ze které se systém nejeví jako reciprokový, tedy neplatí, že by se pohyb měl dít proti směru gradientu disipačního potenciálu. Onsager však také ukázal, že v lineární oblasti je možno vždy zvolit zobecněné síly a toky tak, aby byly podmínky reciprocity splněny (viz [14]). To ovšem znamená, že vždy existuje taková transformace obvodových veličin, ve které se DC systém jeví jako reciprokový. Takovou transformaci nyní najdeme.

Jelikož matice \underline{G} v rovnici (5.1) je obecně nesymetrická, musíme najít takovou jinou soustavu napětí \vec{V} a proudů \vec{J} , mezi kterými budou platit Onsagerovy relace reciprocity. Zavedeme nové souřadnice podle předpisu

$$\vec{U} = \underline{P} \cdot \vec{V}, \quad \vec{I} = \underline{P} \cdot \vec{J}. \quad (5.3)$$

Pak rovnice (5.1) přejde pod novými souřadnicemi na tvar

$$\vec{J} = \underline{\Lambda} \cdot \vec{V}, \quad (5.4)$$

kde

$$\underline{\Lambda} = \underline{P}^{-1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{P}. \quad (5.5)$$

Vztahu (5.5) se říká *podobnostní transformace* a matice $\underline{\Lambda}$ a \underline{G} jsou *podobné* matice. Podobné matice mají stejná vlastní čísla.

Matrice \underline{A} je symetrická, proto se systém jeví pod novými souřadnicemi \vec{V} a \vec{J} jako reciproký. Navíc lze zvolit matici \underline{P} tak, abychom původní matici \underline{G} převedli na *diagonální* podobnou matici $\underline{A} = \text{diag}[\lambda_i]$. Pak bude mít disipační potenciál v nových souřadnicích tvar

$$\Psi(\vec{V}) = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i V_i^2, \quad (5.6)$$

kde λ_i jsou vlastní čísla matice \underline{A} a tedy i podobné matice \underline{G} . Obvod bude DC stabilní právě tehdy, bude-li kvadratická forma (5.6) pozitivně definitní, pak totiž bude rovnovážný bod ležet v lokálním *minimu* disipačního potenciálu. Splnění této podmínky je ekvivalentní požadavku, aby reálné části vlastních čísel λ_i byly vesměs kladné.

Nyní lze zformulovat kritérium pro DC stabilitu obecně nericiprokého obvodu následujícím způsobem.

Věta 5.10: Nechť v lineárním obvodu působí zdroje proudových fluktuací $\delta \vec{I}$ (napětových fluktuací $\delta \vec{U}$), na které obvod zpětně reaguje ve smyslu zdrojové orientace napětími $\delta \vec{U}$ (proudy $\delta \vec{I}$). Nechť $\underline{G} \cdot \delta \vec{U} = \delta \vec{I}$ ($\underline{R} \cdot \delta \vec{I} = \delta \vec{U}$). Obvod je *DC stabilní vůči fluktuacím* $\delta \vec{I}$ ($\delta \vec{U}$) právě tehdy, má-li vodivostní matice \underline{G} (odporová matice \underline{R}) všechna vlastní čísla v *pravé* komplexní polorovině.

Transformace do nových souřadnic (5.3) představuje z geometrického hlediska otočení a dilataci/kontrakci. Je to stará metoda, jak hledat existující symetrii změnou polohy pozorovatele. Podobnostní transformace se používá k řešení analogického problému s vyhledáváním hlavních os symetrie stavových funkcí v mechanice (viz [10]). V našem případě se virtuální trajektorie pootočené a zdeformované původním výběrem souřadnic vrátí podobnostní transformací do symetrického stavu. Z hlediska nové souřadné soustavy je obvod reciproký a pohyb se děje proti směru disipačního potenciálu.

Jaký je fyzikální význam virtuální trajektorie? Z termodynamického hlediska je hodnota elektrického proudu *průměrnou* hodnotou hustoty toku elektrických částic. Tento tok vykazuje v mikroskopickém měřítku neustálé fluktuace kolem své střední hodnoty. Virtuální trajektorie je dráha, po které se tyto fluktuace likvidují (stabilita) nebo naopak rozvíjejí (nestabilita).

Jaký je fyzikální význam vlastních čísel imitanční matice? Podle vztahu (5.6) jsou to stejnosměrné odpory nebo vodivosti, do kterých pracují zdroje fluktuace. Komplexní charakter mají proto, že nejsou definovány pomocí napětí U a proudů I , ale pomocí jejich lineárních kombinací (5.3) neboli V a J . Pro test stability jsou rozhodující reálné části vlastních čísel.

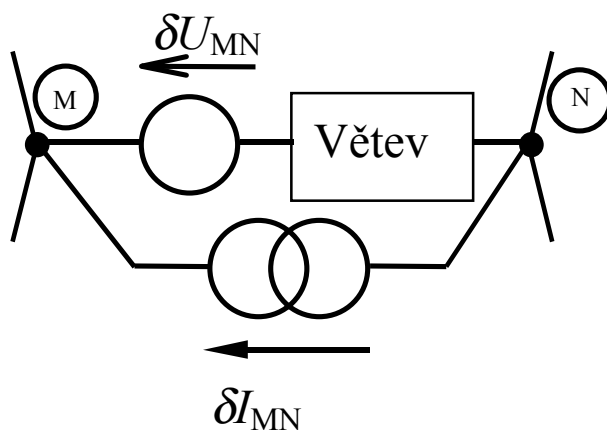
5.2.3 Výběr zdrojů fluktuací

Hlavní myšlenkou termodynamického kritéria DC stability je podrobit rovnovážný stav obvodu vlivu *všech možných* fluktuací a zjišťovat při tom hodnoty

disipačního potenciálu. Zjistí-li se, že každá odchylka od rovnováhy *zvyšuje* hodnotu potenciálu, bude se rovnovážný bod nacházet na dně potenciálové jámy a je DC stabilní. Na základě předchozích úvah budeme pod pojmem *fluktuaace* rozumět buď velmi pomalou změnu obvodové veličiny („klasický“ pohled) nebo její *virtuální* změnu.

Obvod tedy budeme vychylovat z rovnovážného bodu. Musíme umístit do obvodu zdroje fluktuací tak, aby se jejich prostřednictvím prověřilo celé okolí rovnovážného bodu. Budeme mluvit o *úplné soustavě zdrojů odchylek*. Pak bude platit, že poloha vlastních čísel imitanční matice dá nutnou i postačující podmínku DC stability. Kdyby ovšem byly zdroje fluktuací vybrány a umístěny tak, že by neproověřily *celé* okolí rovnovážného bodu, pak by poloha všech vlastních čísel v pravé komplexní polorovině znamenala pouze nutnou, nikoliv však postačující podmínku pro DC stabilitu.

Kdybychom chtěli opravdu spolehlivě prověřit chování systému v okolí rovnovážného stavu, asi bychom vložili do zkoumaného obvodu všechny myslitelné zdroje fluktuací. Předpokládejme, že obvod má konečný počet uzlů a tedy i větví. Vložme do každé větve zdroj napěťové fluktuaace a mezi každé dva uzly zdroj proudové fluktuaace, jak to ukazuje obr. 5.2.5. Při počtu n nezávislých uzlů bude celkový počet P_u napěťových a P_i proudových zdrojů odchylek $P_u = P_i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.



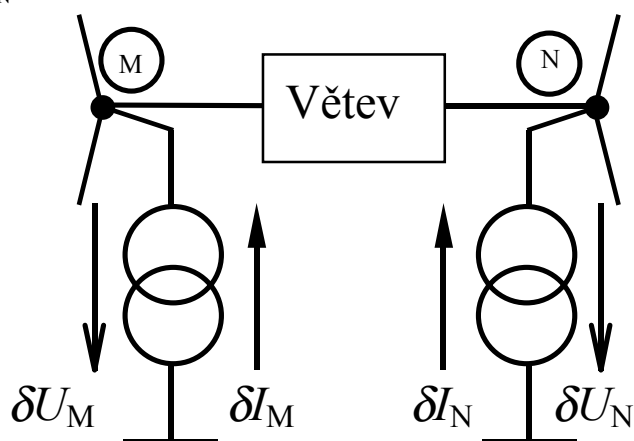
Obr. 5.2.5: Vložení zdrojů odchylek do obvodu

Je pravděpodobné, že zdrojů odchylek je v obvodu zbytečně mnoho a že stabilita daného rovnovážného stavu by mohla být spolehlivě prověřena menším počtem fluktuaací. Pokusíme se zúžit počet těchto zdrojů na rozumné minimum.

Uvažujme pouze proudové poruchy působící na každý napěťový uzel podle obr. 5.2.6.

Nechť je relace mezi proudovou akcí a napěťovou reakcí $\delta \vec{I} = \underline{G} \cdot \delta \vec{U}$. DC stabilita vůči poruchám $\delta \vec{I}$ je zaručena vlastními čísly matice \underline{G} v pravé komplexní polorovině. Zkusme nyní vyjmout z obvodu zdroj δI_N působící na uzel N, nahradit jej zdrojem δI_{MN} působícím mezi uzly M-N (viz obr. 5.2.7) a zjistit, jak se změnila

vlastní čísla vzhledem k tomuto novému buzení. Pro reakční napětí bude platit $\delta U_{M-N} = \delta U_M - \delta U_N$.



Obr. 5.2.6: Proudové fluktuace

Vzhledem k tomu, že do uzlu M nyní přitéká součet a do uzlu N rozdíl flukuačních proudů, obvod bude nyní popsán pomocí nových souřadnic

$$\delta I_1 = \delta J_1, \dots, \delta I_M = \delta J_M + \delta J_N, \delta I_N = -\delta J_N,$$

$$\delta U_1 = \delta V_1, \dots, \delta U_M = \delta V_M, \delta U_N = \delta V_M - \delta V_N$$

neboli maticově

$$\delta \vec{I} = \underline{P} \cdot \delta \vec{J},$$

$$\delta \vec{U} = \underline{P}^T \cdot \delta \vec{V}.$$

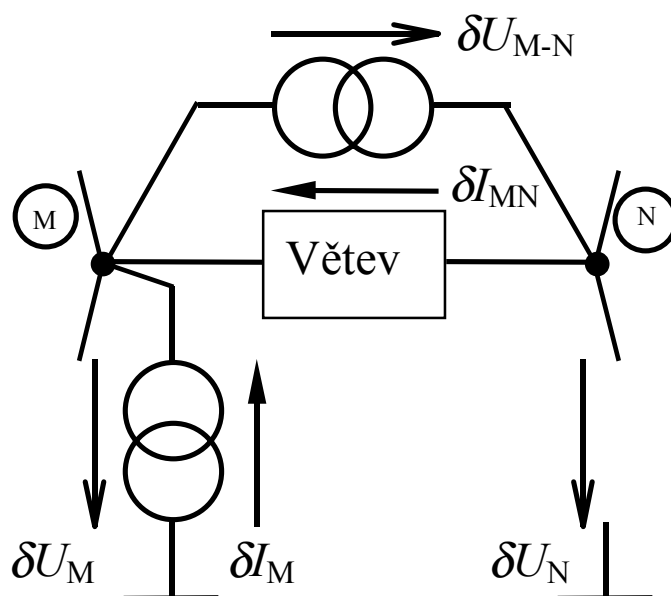
Virtuální dynamika má v nových souřadnicích tvar

$$\delta \vec{J} = \underline{P}^{-1} \cdot \underline{G} \cdot \underline{P}^T \cdot \delta \vec{V} = \underline{\Lambda} \cdot \delta \vec{V}. \quad (5.7)$$

Vztah (5.7) se nazývá *kongruentní transformace* (lit. [46]). Je známo, že navzájem kongruentní matice \underline{G} a $\underline{\Lambda}$ mají obecně různá vlastní čísla. Vlastní čísla přitom nesou veškerou informaci o virtuální dynamice obvodu. Z hlediska kvality prověření stability pracovního bodu tedy nemohou být buzení podle obr. 5.2.6 a 5.2.7 ekvivalentní. Obr. 5.2.6 přitom odpovídá analýze obvodu metodou uzlových napětí. *Proudové buzení, kdy proudový zdroj je zařazen mezi každý uzel a zem, nepředstavuje úplnou soustavu proudových odchylek.*

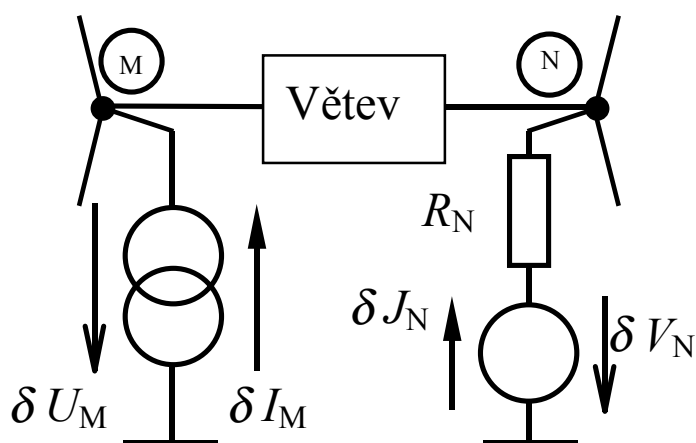
Tento závěr potvrzuje větu 5.10, podle které se dá z polohy vlastních čísel imitanční matice spolehlivě stanovit pouze *DC stabilita vůči příslušným fluktuacím*, nikoliv vůči libovolným fluktuacím. Fluktuace příslušné např. k vodivostní matici odvozené z metody uzlových napětí jsou proudové zdroje zapojené mezi každý napěťový uzel a „zem“.

Obdobná je situace s napěťovými odchylkami umístěnými do jednotlivých větví. Soustavu nezávislých napěťových odchylek lze opět sestavit více způsoby, které obecně *nejsou* z hlediska prověření stability ekvivalentní.



Obr. 5.2.7: Přemístění zdroje odchylky

Stejně to dopadne s řešením otázky, zda můžeme navzájem nahrazovat napěťové a proudové zdroje fluktuací a považovat je z hlediska DC stability za ekvivalentní. Nahradíme-li zdroj proudové fluktuace δI_N z obr. 5.2.6 zdrojem napěťové fluktuace δV_N podle obr. 5.2.8, půjde ze *signálového* hlediska o ekvivalentní náhradu, pokud $\delta V_N = R_N \cdot \delta I_N$, kde R_N je odpor přímé větve mezi uzlem N a „zemí“ obvodu podle obr. 5.2.6 (není zakreslen). Také tato náhrada však mění vlastní čísla systémové matice a z hlediska DC stability *není* ekvivalentní.



Obr. 5.2.8: Náhrada proudové odchylky napěťovou odchylkou

Často potřebujeme stanovit hodnoty obvodových parametrů, pro které je daný stav DC stabilní nebo nestabilní. Jinak řečeno zjišťujeme hranice stability v prostoru parametrů.

V [35] je ukázáno, že vložíme-li do obvodu vždy jen jeden zdroj odchylky, redukuje se termodynamický test stability na metodu záporných odporů. Imitanci matice je jednorozměrná a její vlastní číslo je zároveň imitancí, do které pracuje zdroj odchylky. Uvažujeme-li současné působení všech zdrojů odchylek, pracujeme

s virtuální maticí, jejíž diagonální prvky jsou pracovními imitancemi *individuálně* působících zdrojů odchylek. Pracovními imitancemi *současně* působících zdrojů odchylek jsou vlastní čísla matice, která se od prvků v hlavní diagonále přirozeně liší. Z toho vyplývá, že velikost konkrétní pracovní imitance se mění s připojením nebo odpojením jiných zdrojů odchylek. V praxi může nastat extrémní situace, kdy všechny prvky hlavní diagonály virtuální matice jsou kladné a přitom některé z vlastních čísel leží v záporné komplexní polorovině. Znamenalo by to, že individuálně působící zdroje odchylek by neznamenaly existující nestabilitu.

Z toho, co bylo dosud uvedeno, jednoznačně vyplývá následující poučka.

Věta 5.11: Pro bezpečné stanovení oblastí stability musíme zvolit úplnou soustavu zdrojů odchylek.

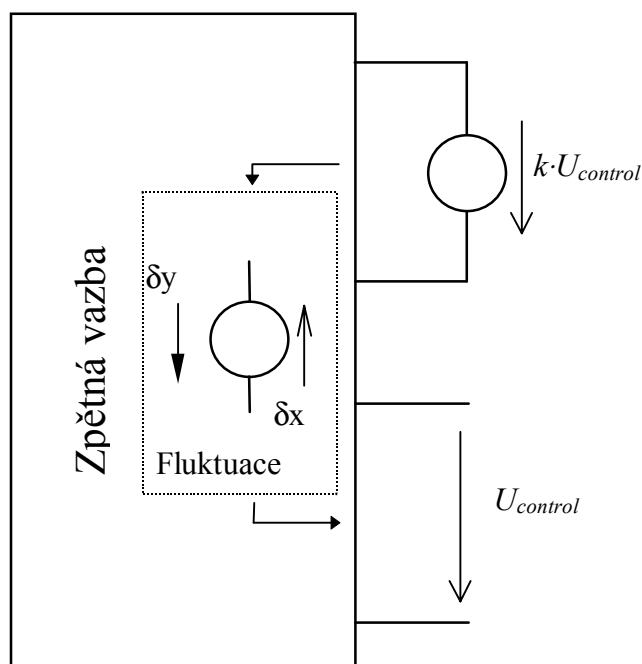
Stanovení úplného souboru odchylek, který je zároveň souborem minimálním, je náročnou úlohou, která není v této práci řešena.

Velmi často nám nejde o přesné stanovení hranic stability, ale pouze o bezpečné odhalení všech DC nestabilních bodů. V takovém případě není nutné prohledávat fluktuacemi celý stavový prostor v okolí rovnovážného bodu. Stačí se zaměřit na ty nadroviny (řezy) stavového prostoru, kde se DC nestabilita může projevit neexistencí lokálního minima disipační funkce. V praxi to znamená, že soubor zdrojů odchylek nemusí být úplný. Výhodou je snížení řádu virtuální matice. Nevýhodou je to, že výsledky testu nelze použít pro stanovení oblastí stability.

V [35] je ukázáno, že poměrně bezpečný test DC nestability lze provést umístěním zdrojů odchylek do výkonných částí řízených zdrojů. Řád virtuální matice je pak roven počtu řízených zdrojů v obvodu.

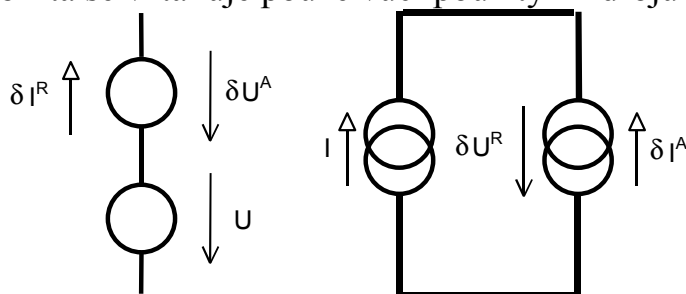
Chceme-li spolehlivě otestovat *DC nestabilitu*, potřebujeme vložit do obvodu sadu (vektor) zdrojů fluktuace do takových míst, odkud jsou schopny „ovlivnit“ každý případný záporný odpor. Přitom se snažíme, aby jejich počet byl co nejmenší, neboť se od něj odvíjí řád virtuální matice.

Potenciálně nebezpečné pro DC stabilitu jsou řízené zdroje, neboť každý řízený zdroj obsahuje zpětnou vazbu, která se zbytkem obvodu uzavírá mezi jeho výkonovou a řízenou částí. Umístíme-li některý testovací signál δx do této smyčky, vrátí se nám touto zpětnou vazbou reakce δy zpět do testovacího zdroje a tím ji také otestujeme (viz obr. 5.2.9). Efekt záporného odporu může vzniknout pouze tímto způsobem (pokud neuvažujeme předem záporné odpory přímo v zapojení), proto se jeví umístění zdrojů fluktuací výhradně do zpětnovazebních smyček řízených zdrojů jako poměrně účinná metoda.



Obr. 5.2.9: Test řízeného zdroje

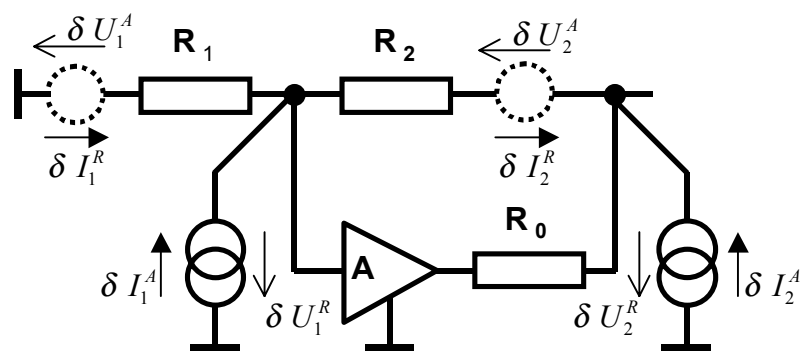
Nejjednodušší způsob, jak zařadit zdroj fluktuace do této smyčky, je rozmítat výkonovou část řízeného zdroje. Provede se to tak, že se ke každému řízenému zdroji napětí zapojí do série napěťová fluktuace a ke každému řízenému zdroji proudu se paralelně připojí zdroj proudové fluktuace (viz obr. 5.2.10). Přitom index ^A značí akci a index ^R reakci. Flukuační vektor bude mít tolik prvků, kolik je v obvodu řízených zdrojů. Virtuální matice bude obecně hybridní. Tyto případy byly publikovány v lit. [21], [36]-[39]. Je třeba zdůraznit, že ve smyslu výše uvedených důkazů nelze z takto omezené sady zdrojů fluktuací usuzovat na hranice oblasti DC stability ve vztahu k DC parametrům zapojení. Směrodatné jsou jen případy zjištění nestability, DC stabilita se vztahuje pouze vůči použitým zdrojům fluktuace.



Obr. 5.2.10: Rozmítání výkonových částí řízených zdrojů. A=akce, R=reakce.

5.2.4 Ilustrativní příklad

Uvažujme DC zapojení podle obr. 5.2.11, ve kterém figuruje napěťový zesilovač s nekonečným vstupním odporem, s nenulovým výstupním odporem R_0 a s obecným zesílením A . V obvodu působí zdroje všech možných odchylek označených indexem ^A jako akce, reakční veličiny jsou označeny indexem ^R.



Obr. 5.2.11: Vložení zdrojů odchylek

Působí-li pouze proudové zdroje, platí

$$\begin{bmatrix} \delta I_1^A \\ \delta I_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -A \cdot G_0 - G_2 & G_0 + G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta U_1^R \\ \delta U_2^R \end{bmatrix},$$

kde $G_i = 1/R_i$ jsou odpovídající vodivosti. Rozbor vlastních čísel vodivostní matice ukazuje, že ekvivalentní podmínka pro DC nestabilitu vůči uvedeným zdrojům odchylek je

$$A > 1 + \frac{R_0 + R_2}{R_1}. \quad (5.8)$$

Působí-li pouze napěťové zdroje, dostáváme se za předpokladu nekonečného vstupního odporu zesilovače do potíží, neboť vlivem singularity nelze vyjádřit vztah $\delta \vec{U}^A = \underline{R} \cdot \delta \vec{I}^R$. Lze však napsat

$$\begin{bmatrix} \delta I_1^R \\ \delta I_2^R \end{bmatrix} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} A-1 & 1 \\ -A+1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta U_1^A \\ \delta U_2^A \end{bmatrix},$$

kde $\Gamma = A \cdot R_1 - R_0 - R_1 - R_2$ odpovídá Greenově konstantě. Virtuální matice je singulární, takže jsou problémy s vyhodnocením *současného* působení obou zdrojů odchylek. Uvažujeme-li však působení každé odchylky zvlášť, vyjde nám podmínka DC nestability vůči zdroji δU_1^A

$$A > 1$$

a vůči zdroji δU_2^A opět podmínka (5.8).

Tyto výsledky znamenají, že pokud $1 < A < 1 + \frac{R_0 + R_2}{R_1}$, DC nestabilita nebude odhalena žádným ze zdrojů odchylky uvedených na obr. 5.2.11 kromě zdroje δU_1^A . V tomto případě by bylo neúčinné rozmítat výkonovou část zesilovače neboli řízeného zdroje a platí závěry části 5.1.1.

Nakonec uvažujme současné působení zdrojů odchylek δU_1^A a δI_1^A . Rovnice pro odchylky bude

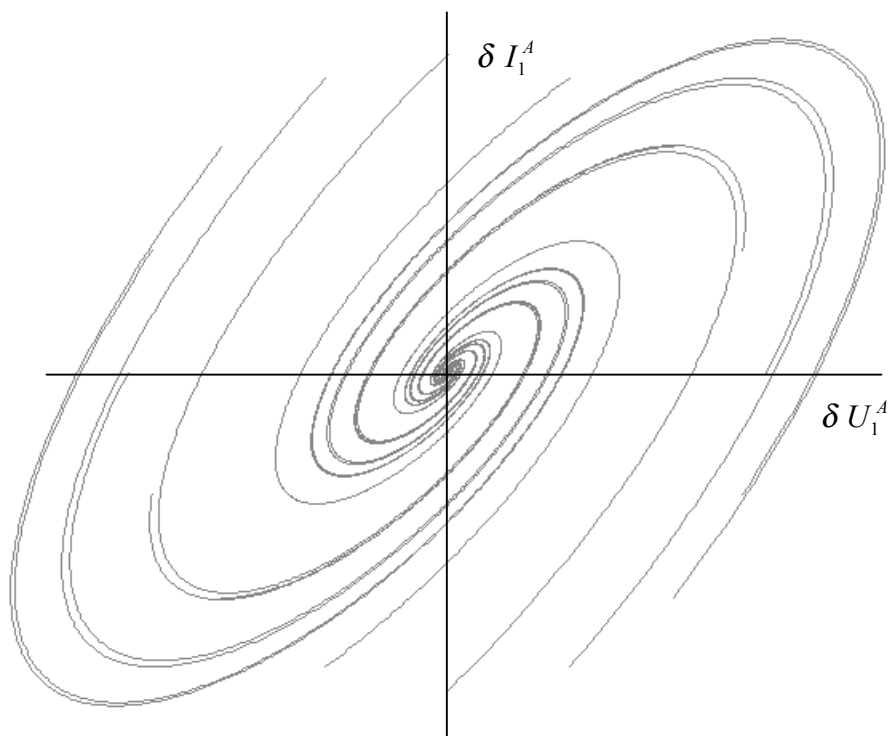
$$\begin{bmatrix} \delta I_1^R \\ \delta U_1^R \end{bmatrix} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} A-1 & R_0 + R_2 \\ -(R_0 + R_2) & -R_1(R_0 + R_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta U_1^A \\ \delta I_1^A \end{bmatrix},$$

kde Γ je opět Greenova konstanta pro toto uspořádání obvodu. Virtuální matice je tentokrát hybridní. Rozbor jejích vlastních čísel ukazuje, že podmínka DC nestability vůči současně působícím zdrojům δU_1^A a δI_1^A vyjde opět jako (5.8).

Podmínka pro jednotlivě působící zdroj δU_1^A je však přísnější. Mějme např. $R_0 + R_2 = R_1 = 1\text{k}\Omega$, $A = 1,5$. Virtuální matice pak bude

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} -10^{-3} & -2 \\ 2 & 2 \cdot 10^3 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Členy v úhlopříčce ukazují pracovní odpory nebo vodivosti jednotlivě působících a vlastní čísla *společně* působících zdrojů odchylek.



Obr. 5.2.12: Virtuální trajektorie

Na obr. 5.2.12 jsou znázorněny virtuální trajektorie pro tento případ. Vzhledem k současně působícím fluktuacím je systém DC stabilní, i když je z trajektorie patrné, že samotný zdroj δU_1^A pracuje evidentně do záporného odporu a stabilitu zajišťuje proud uzavírající se druhým zdrojem δI_1^A . Je to poznat z trajektorie vycházející z vodorovné osy, která se nejprve od rovnovážného bodu vzdaluje a až pak se k němu vrací.

Ohledně DC stability nereziprocních obvodů lze tedy učinit důležitý závěr. Nestabilita se může projevit pouze při vhodné kombinaci zdrojů rušení a při jiné kombinaci k ní vůbec nemusí dojít. Kombinace zdrojů fluktuací vedoucí k nestabilitě rozšířená o další zdroje již nemusí vést k nestabilitě.

5.2.5 Obecné kritérium

Obecné kritérium DC stability by mělo vypovídat o schopnosti obvodu reagovat na *libovolný soubor fluktuací*. Libovolný soubor fluktuací lze získat tak, že ze souboru všech možných fluktuací odebereme určitý počet zdrojů. To bude odpovídat

vynechání příslušných řádků a sloupců hybridní matice. O stabilitě bude rozhodovat poloha vlastních čísel vzniklé submatice.

Na základě těchto úvah lze formulovat obecné kritérium DC stability.

Věta 5.12: Označme soubor všech možných zdrojů fluktuací jako \bar{x}^A a odpovídající reakce obvodu jako \bar{x}^R . Necht' jsou tyto akce a reakce vázány obecně hybridním vztahem $\underline{H} \cdot \bar{x}^R = \bar{x}^A$. Pak je obvod DC stabilní, pokud submatice vzniklá vynecháním libovolného počtu členů hlavní diagonály spolu s příslušnými řádky a sloupci má všechna vlastní čísla v pravé komplexní polorovině.

V praxi bude většinou nemožné sestavovat systémovou matici pro všechny možné zdroje rušení. *Věta 5.12* však ukazuje vztah mezi stabilitou vůči fluktuaci a obecnou stabilitou, která je vlastně stabilitou vůči obecné fluktuaci.

Vraťme se ještě na chvíli ke schématu na obr. 5.2.11 a vztahu (5.9), který vypovídá o DC stabilitě v případě samostatně a současně působících zdrojů rušení. Uvedený příklad ukazuje, že zdroj δU_1^A je schopen způsobit nestabilitu a že zdroj δI_1^A je naopak schopen nestabilitu vykompenzovat. Jednoduchou úvahou dojdeme k závěru, že obvod se stane náchylným k nestabilitě vlivem parazitní indukčnosti v sérii s odporem R_1 . Ke stabilitě naopak přispívá parazitní kapacita mezi vstupem zesilovače a zemním uzlem.

Uvedené skutečnosti lze formulovat následujícím způsobem.

Věta 5.13: Záporný člen v hlavní diagonále virtuální matice indikuje možnost vzniku nestability vlivem parazitní reaktance spojené s příslušným zdrojem fluktuace.

Jde-li o napěťový zdroj, je příslušnou reaktancí indukčnost větve, v případě proudového zdroje je to kapacita mezi uzly.

Věta 5.14: Necht' submatice \underline{H}_1 odpovídající daným zdrojům fluktuací má některé vlastní číslo v levé komplexní polorovině. Pokud submatice \underline{H}_2 odpovídající přidání dalšího zdroje fluktuace nemá žádné vlastní číslo v levé komplexní polorovině, pak má parazitní reaktance spojená s tímto přidaným zdrojem stabilizující účinky.

5.2.6 Aplikace

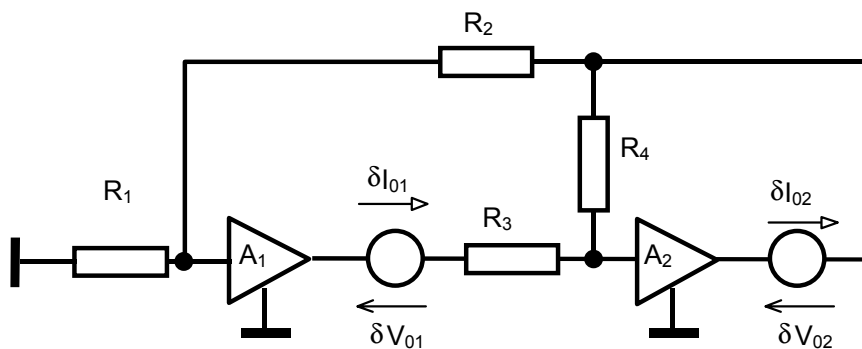
Uvažujme DC rezistivní obvod podle obr. 5.2.13 včetně zdrojů odchylek ve výstupech řízených zdrojů (viz [37]). Rovnice virtuální rovnováhy bude

$$\begin{bmatrix} \delta V_{01} \\ \delta V_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(1-A_1) + R_2 + R_3 + R_4 & -R_1(1-A_1) - R_2 \\ -A_2 R_4 + (R_1 + R_2)(1-A_2) & (R_1 + R_2)(1-A_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta I_{01} \\ \delta I_{02} \end{bmatrix}$$

a odpovídající charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - (r_{11} + r_{22})\lambda + \det \underline{R} = 0,$$

kde r_{11} a r_{22} jsou členy matice \underline{R} a $\det \underline{R}$ je její determinant.



Obr. 5.2.13: Rozmítání výkonových částí řízených zdrojů

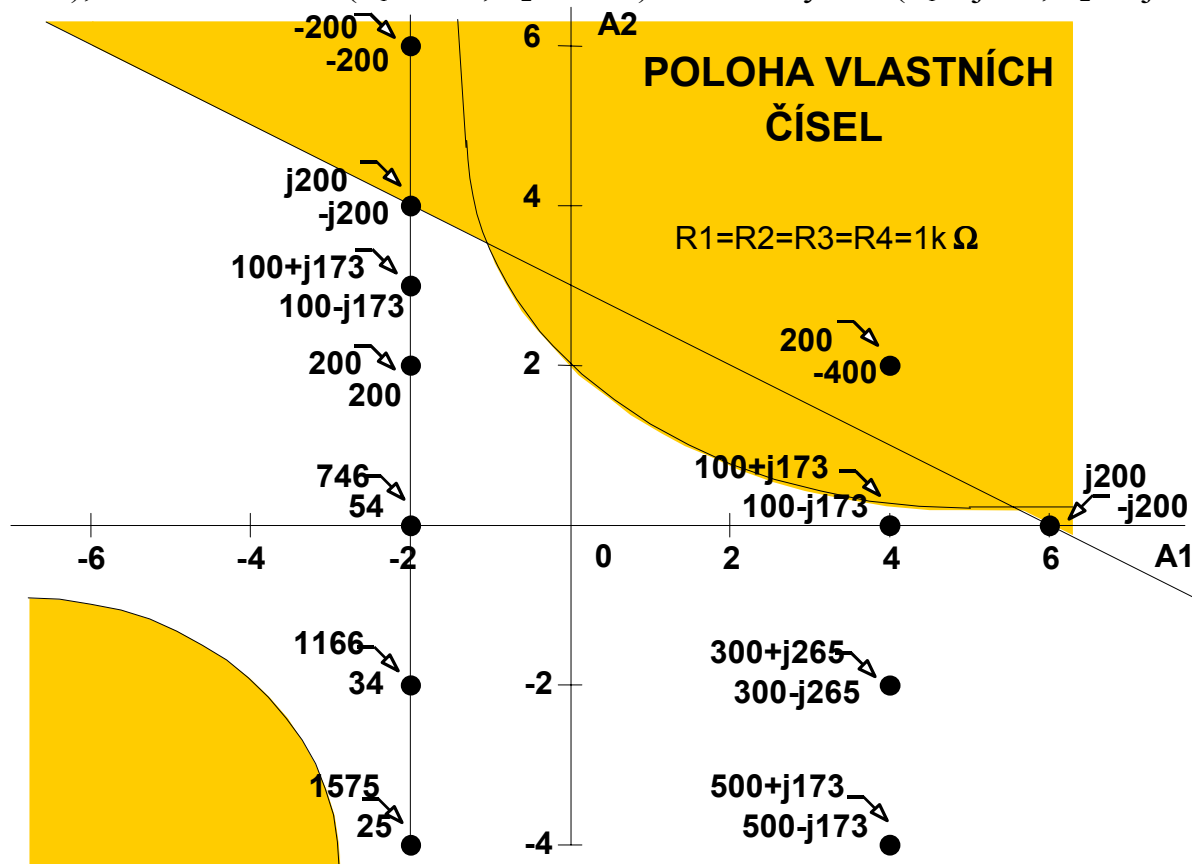
Podmínka DC nestability vůči uvedeným zdrojům fluktuací bude

$$\operatorname{Re}\{\ddot{e}_1\} = \operatorname{Re}\{\ddot{e}_2\} < 0 \Rightarrow$$

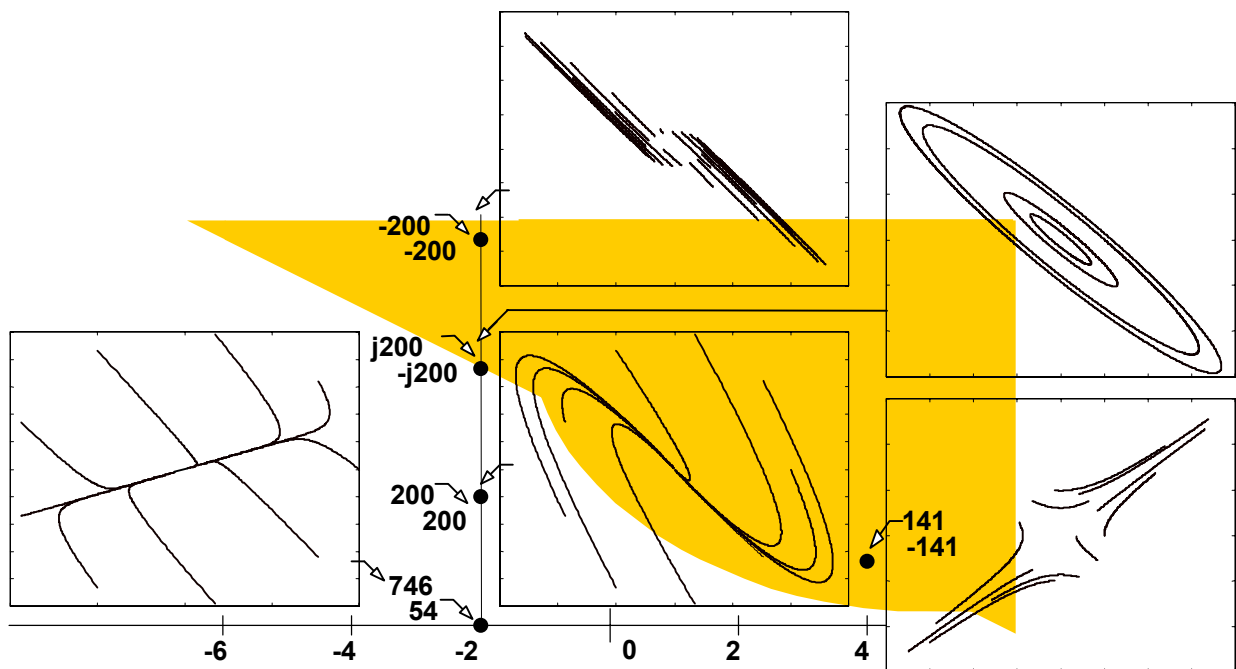
$$A_2 \left[A_1 + \frac{R_3}{R_4} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \right] > \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) \wedge A_1 + (A_2 - 2) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) > \frac{R_3 + R_4}{R_1}$$

Pomocí Greenova algoritmu [1] bychom obdrželi pouze první podmínku.

Na obr. 5.2.14 je znázorněna závislost vlastních čísel na zesíleních A_1 a A_2 . Barevně odlišené plochy vyznačují oblasti DC nestability. Obr. 5.2.15 představuje virtuální trajektorie příslušné k jednotlivým vlastním číslům. Lze pozorovat klasické typy trajektorií jako např. stabilní ohnisko ($\lambda_1 = \lambda_2 = 200$), nestabilní ohnisko ($\lambda_1 = \lambda_2 = -200$), nestabilní sedlo ($\lambda_1 = 141, \lambda_2 = -141$) a mezní cyklus ($\lambda_1 = j200, \lambda_2 = -j200$).



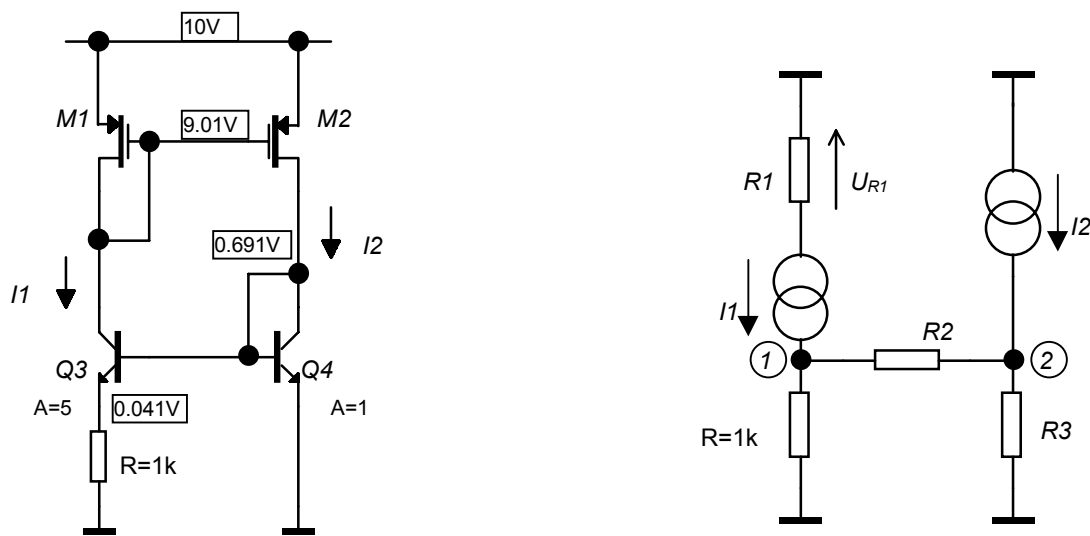
Obr. 5.2.14: Poloha vlastních čísel obvodu podle obr. 5.2.13



Obr. 5.2.15: Virtuální trajektorie pro daná vlastní čísla

Další aplikace byly publikovány v [40]-[43].

V [1] je řešena stabilita zapojení podle obr. 5.2.16. Prozkoumáme uvedené zapojení blíže.



Obr. 5.2.16: Testované zapojení a náhradní obvod

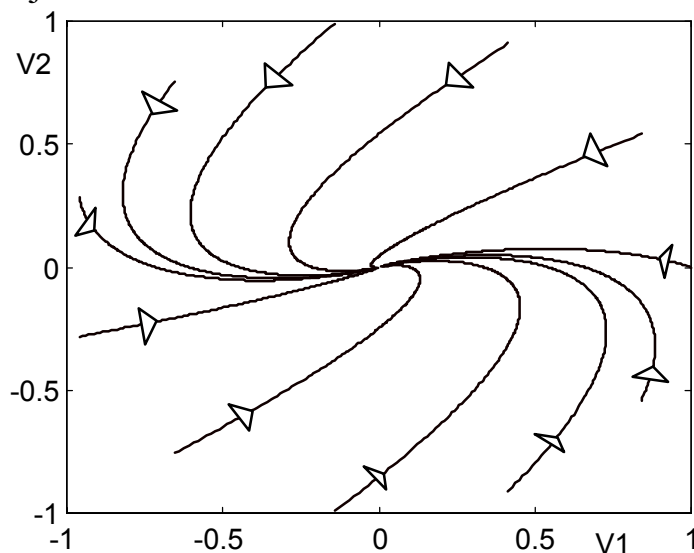
Pro pracovní bod uvedený na obr. 5.2.16 jsou platné tyto parametry: $R_1 = 3.51 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 64 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 641 \text{ }\Omega$, $I_1 = k_1(U_2 - U_1)$, $I_2 = k_2 U_{R1}$, konstanty $k_1 = 1.57 \text{ mS}$ a $k_2 = 285 \text{ }\mu\text{S}$. Pro variace řízených zdrojů pak platí maticová rovnice

$$\begin{bmatrix} \delta I_1 \\ \delta I_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5.66421 \cdot 10^{-4} & 1.55456 \cdot 10^{-3} \\ -2.19143 \cdot 10^{-4} & 1.57208 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta V_1 \\ \delta V_2 \end{bmatrix}$$

Po dosazení konkrétních konstant vyjdou vlastní čísla vodivostní matice

$$\lambda_{1,2} \approx (10.69 \pm j \cdot 2.964) \cdot 10^{-4} \text{ [S]},$$

tj. obvod je z důvodu kladných reálných částí stejnosměrně stabilní vůči fluktuacím řízených zdrojů (souhlasí se závěrem v [1]). Můžeme si dokonce učinit představu o způsobu likvidace fluktuace po odeznění její příčiny znázorněním virtuálních trajektorií v souřadné soustavě (V_1, V_2) , což úvahy založené pouze na výsledcích práce [1] neumožňují.



Obr. 5.2.17: Virtuální trajektorie

5.2.7 Obvody s DC vazbami

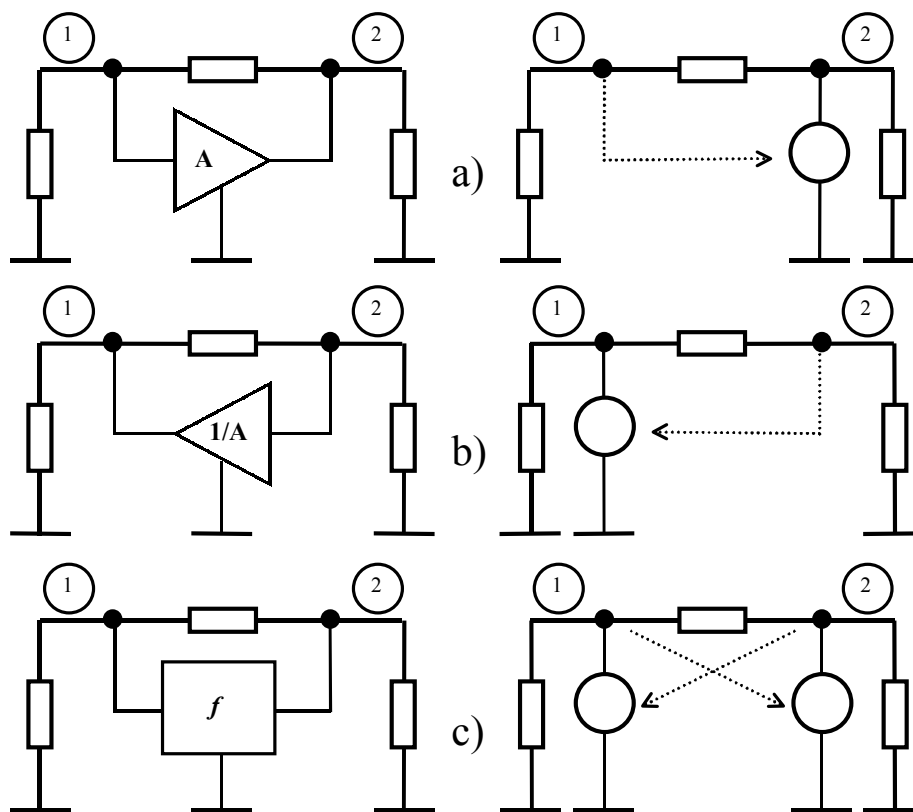
Velmi často se setkáváme s obvodovými prvky, které zanášejí mezi stavové proměnné algebraické vazby typu

$$f(\vec{u}) = 0.$$

Tak např. ideální zesilovač napětí svazuje napětí vstupního a výstupního uzlu podmínkou

$$f = u_2 - A \cdot u_1 = 0.$$

Na obr. 5.2.18 je ukázáno, že zajištění této podmínky lze realizovat mnoha způsoby, přičemž je podstatné, kam umístíme aktivní prvek, který splnění podmínky zajišťuje (v našem případě napěťový řízený zdroj). Případy a) a b) jsou triviální, v případě c) je podmínka zajištěna dvěma řízenými zdroji, přičemž každý se může na její realizaci podílet s jinou vahou. První dvě realizace jsou tedy zvláštními případy poslední obecné varianty.



Obr. 5.2.18: Různé realizace vazby $f = u_2 - A \cdot u_1 = 0$

Je možný ještě jeden výklad situace z obr. 5.2.18. Splnění vazební podmínky $f = 0$ zajišťují různé makroobvody z levé části obrázku takto: v případě a) pouze proudem do uzlu ②, v případě b) pouze proudem do uzlu ① a v případě c) proudy do obou uzlů ① i ②.

Základní úvahy

V částech 4.3.2 a 5.2.1 jsme viděli, že rovnice pro virtuální odchylky je přímým důsledkem termodynamických zákonů, přesněji řečeno zákona minimální produkce entropie. Věc se dá také interpretovat tak, že každý úsek virtuální trajektorie minimalizuje okamžitý virtuální výkon. Virtuální trajektorie představuje takovou cestu, která minimalizuje celkový výkon rozptýlený na rezistorech.

Předpokládejme, že součástí zapojení je makroobvod s r vývody, který svazuje uzlová napětí podmínkou $f(\vec{u}^M) = 0$. Indexem M je znázorněno, že příslušný vektor zahrnuje pouze uzly, ke kterým je připojeno makro M . Vzhledem k tomu, že pracujeme s infinitesimálními výchylkami a linearizovanými modely, můžeme vazební podmínku přepsat na tvar

$$f(\vec{u}^M) = f_1 u_1^M + \dots + f_r u_r^M = \vec{f}^T \cdot \vec{u}^M = 0.$$

Tak např. napěťový zesilovač ZES zanáší do odporové sítě vztah mezi dvěma vstupními uzly „+“ a „-“ a uzlem „out“, ke kterému je připojen výstup:

$$f(\vec{u}^{ZES}) = f(u_{out}, u_+, u_-) = u_{out} - A \cdot (u_+ - u_-) = 0,$$

A je stejnosměrné zesílení.

Zbytek obvodu popsany vodivostní maticí \underline{G} má tendenci reagovat proti směru gradientu disipačního potenciálu, avšak nyní je vázán podmínkou f . Obvodové rovnice se dají opět získat hledáním lokálního extrému potenciálové funkce, tentokrát však extrému vázaného. Použijeme známou metodu Lagrangeových multiplikátorů (viz část 4.2.3) a budeme řešit extrémální úlohu pro modifikovanou Rayleighovu funkci

$$\mathfrak{R}^*(\vec{u}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot f, \quad (5.10)$$

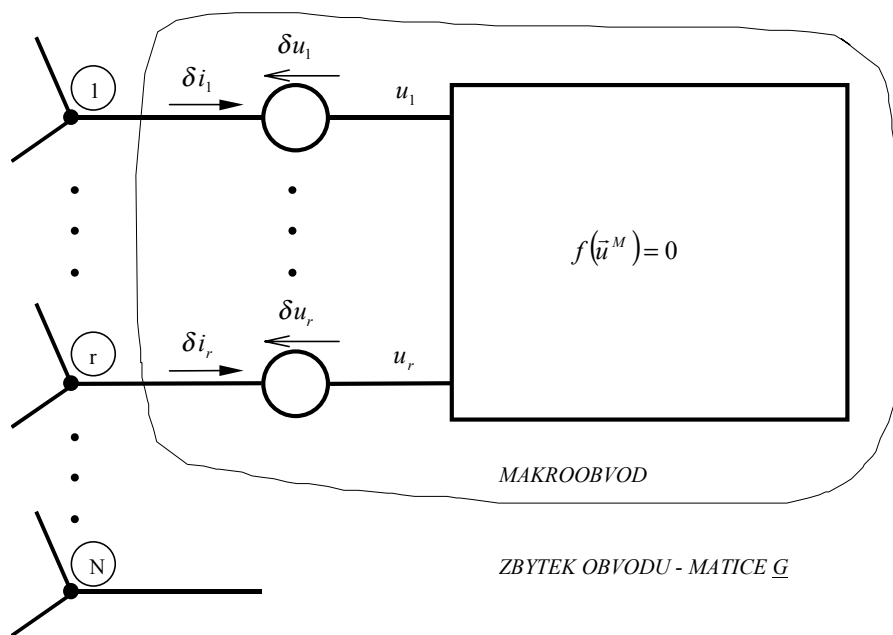
kde λ je tzv. Lagrangeův neurčitý multiplikátor. Obvodové rovnice získáme derivováním rovnice (5.10) podle jednotlivých uzlových napětí

$$\underline{G} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \underline{G} \cdot \vec{u} + \vec{i}_R = \vec{0}, \quad (5.11)$$

\vec{i}_R je proudová reakce udržující v platnosti podmínku f . Tato reakce je kromě uzlových napětí další neznámou a znamená proud, který dodává makroobvod do okolní sítě svými přívody. Úvahou o derivaci ve vztahu (5.11) snadno dospějeme k závěru, že makromodel vyšel jako reciprocitní součástka, která přispívá ke splnění podmínky f všemi svými vývody. Je to způsobeno tím, že řešíme extrémální úlohu, která historicky vznikla v analytické mechanice, kde platí princip rovnosti akce a reakce. Nereciprocitní prvky jako např. řízené zdroje se snaží splnit danou vazbu pouze některými svými vývody, např. výstupem napěťového zesilovače. Tuto skutečnost zohledníme váhovými koeficienty $0 \leq K_i \leq 1$, které přiřadíme každému vývodu makra. Pro přehlednost jsou uzlová napětí číslována tak, že prvních r uzlů je rezervováno pro vývody makroobvodu. Proto je zbytek vektoru proudových reakcí doplněn nulami:

$$\underline{G} \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} f_1 K_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_r K_r \\ \vec{0} \end{bmatrix} = \vec{0}. \quad (5.12)$$

Vztah (5.12) spolu s vazební podmínkou umožňuje vypočítat všechna uzlová napětí a neurčitý člen λ , ze kterého zjistíme všechny proudy mezi makrem a zbytkem obvodu.



Obr. 5.2.19: Zařazení makra do obvodu

Nyní zapojíme do každého přívodu makra zdroj napěťové fluktuace podle obr. 5.2.19. Jsou to jediné vnější zdroje, budeme tedy sledovat stabilitu nuly. Výsledný systém virtuálních rovnic lze zapsat maticově jako

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \underline{G} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline f_1 \cdot K_1 \\ \hline \vdots \\ \hline f_r \cdot K_r \\ \hline \bar{0} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|} \hline \bar{u} \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline \bar{0} \\ \hline \delta_u f \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

\underline{G}^*

Platí, že

$$\delta_u f = f_1 \cdot \delta u_1 + \dots + f_r \cdot \delta u_r = \bar{f}^T \cdot \delta \bar{u}^M \neq 0. \quad (5.13)$$

Považujeme-li fluktuace za vnitřní problém makroobvodu, dojdeme k důležitému závěru: díky fluktuacím nedokáže makroobvod přesně splnit vazební podmínku. Výraz (5.13) udává mikroskopickou chybu vazby.

Obrácenou rovnicí můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{array}{|c|} \hline \bar{u} \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \underline{G}^{*-1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \bar{0} \\ \hline \delta_u f \\ \hline \end{array}.$$

Z této rovnice můžeme získat důležitý vztah

$$\lambda = c \cdot \delta_u f. \quad (5.14)$$

Rovnice (5.14) udává jedinou podstatnou závislost mezi fluktuací a jejím následkem. Říká, že reakce na nerovnováhu vzniklou fluktuací *libovolné* veličiny uvnitř makroobvodu je přímo úměrná míře porušení vazební podmínky. O stabilitě rozhoduje konstanta úměrnosti c .

Vezmeme-li v úvahu vztahy (5.11) až (5.14), dostaneme pro reakční proud výraz

$$\delta \bar{i}^M = c \cdot \begin{bmatrix} f_1 \cdot K_1 \\ \vdots \\ f_r \cdot K_r \end{bmatrix} \cdot [f_1 \ \dots \ f_r] \cdot \delta \bar{u}^M = \underline{g} \cdot \delta \bar{u}^M.$$

Jelikož matice \underline{g} obsahuje pouze jednu podstatnou korelaci mezi $\delta \bar{u}^M$ a $\delta \bar{i}^M$, bude mít pouze jedno nenulové vlastní číslo. Pro DC stabilitu musí toto číslo ležet v pravé polorovině komplexní roviny.

Obecně mohou makroobvody zanášet mezi obvodové veličiny více algebraických vazeb. Každá vazební podmínka si k sobě přibere jeden Lagrangeův multiplikátor. Počet vlastních čísel neboli vlastních imitancí rozhodujících o DC stabilitě bude roven počtu vazeb. Tak např. uvedený napěťový zesilovač zanes do obvodu jednu imitanci, dvojbran dvě imitance.

Obecná formulace

Předpokládejme, že obvod je po linearizaci tvořen odporovou sítí popsanou vodicovní maticí \underline{G} rozměru $n \times n$ a že uzlová napětí jsou vázána r algebraickými podmínkami

$$f^1(\bar{u}) = 0, \dots, f^r(\bar{u}) = 0. \quad (5.10)$$

Linearizací těchto podmínek dostaneme pro okolí rovnovážného bodu

$$\begin{array}{l} f_1^1 u_1 + \dots + f_n^1 u_n = 0, \\ \vdots \\ f_1^r u_1 + \dots + f_n^r u_n = 0. \end{array} \quad (5.11)$$

Zajištění každé z podmínek (5.10) bude mít na starosti jeden makroobvod, přičemž může použít pro tento účel proudové řízení do libovolných uzlů. Rovnici (5.11) zapíšeme v přijatelnějším maticovém tvaru

$$\underline{F}^T \cdot \vec{u} = \vec{0},$$

kde

$$\underline{F}^T = \begin{bmatrix} f_1^l & \cdot & \cdot & f_n^l \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ f_1^r & \cdot & \cdot & f_n^r \end{bmatrix}$$

je matice vazebních podmínek. Dále zavedeme matici zohledňující způsob, jakým se každý makroobvod bude podílet na splnění své podmínky proudovými příspěvky do jednotlivých uzlů. Je to matice

$${}^k \underline{F} = \begin{bmatrix} f_1^l k_1^l & \cdot & \cdot & f_1^r k_1^r \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ f_n^l k_n^l & \cdot & \cdot & f_n^r k_n^r \end{bmatrix},$$

kde k_i^j je váhový koeficient od 0 do 1, který udává váhu, se kterou přispívá makroobvod zajišťující splnění j -té podmínky proudovým řízením do uzlu i .

Dá se ukázat, že výsledná struktura bude popsána maticovou rovnicí

$$\begin{bmatrix} \underline{G} & {}^k \underline{F} \\ \underline{F}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \delta_u \vec{F} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

kde $\vec{\lambda}$ je vektor tzv. Lagrangeových multiplikátorů, jehož fyzikálním významem je vektor proudů, které jsou jednotlivými makroobvody rozdělovány do jednotlivých uzlů podle příslušných vah k_i^j , $\delta_u \vec{F} = \underline{F}^T \cdot \delta \vec{u}$ je tzv. mikroskopická chyba vazeb, která udává míru nesplnění zadaných podmínek vlivem fluktuací uvnitř makroobvodů. Je přitom zcela podružné, jakého typu jsou tyto fluktuace a kde přesně v makroobvodu působí.

Podmínky DC stability

Nutná a postačující podmínka DC stability zní takto:

Věta 5.14: Uvažovaná odporová síť s vodivostní maticí \underline{G} a s vazbami danými rovnicemi (5.11) je DC stabilní, právě když rozšířená matice

$$\underline{G}^* = \begin{bmatrix} \underline{G} & {}^k \underline{F} \\ \underline{F}^T & \underline{0} \end{bmatrix}$$

má všechna vlastní čísla v pravé komplexní polorovině.

Všimněme si, že v rovnici (5.12) je místo i pro vnější zdroje proudových odchylek do každého napěťového uzlu. Uvnitř makroobvodů navíc působí všechny myslitelné fluktuace, které jsou zastoupeny výslednou chybou vazby $\delta_u \vec{F}$. Proto je splněna podmínka úplného systému zdrojů odchylek, aniž bychom museli věnovat pozornost problému konkrétní volby těchto zdrojů.

Postačující podmínka pro DC nestabilitu zní takto:

Věta 5.15: Pokud platí, že matice

$$\underline{F}^T \cdot \underline{G}^{-1} \cdot {}^k \underline{F}$$

má alespoň jedno vlastní číslo v levé komplexní polorovině, systém je DC nestabilní.

Platí totiž, že

$$\bar{\lambda} = \underline{C} \cdot \delta_u \bar{F} = \left[\underline{F}^T \cdot \underline{G}^{-1} \cdot {}^k \underline{F} \right]^{-1} \cdot \delta_u \bar{F}, \quad (5.13),$$

takže matice \underline{C} je submaticí matice \underline{G}^{*-1} . Odtud plyne, že také matice \underline{G}^* má vlastní číslo v levé komplexní polorovině, čímž je tvrzení dokázáno.

Ze struktury matic \underline{G}^* a \underline{C} plyne tento další poznatek:

Věta 5.16: Pokud jsou libovolné algebraické vazby v rezistorové síti s kladnými odpory realizovány reciprocitním způsobem, tj. $k_i^j = 1$, pak je výsledný obvod vždy DC stabilní.

Důkaz plyne ze vztahu (5.13) pro ${}^k \underline{F} = \underline{F}$ a využívá toho, že podobnostní transformace reálné a pozitivně definitní matice \underline{G}^{-1} pomocí reálné matice \underline{F} dává pozitivně semidefinitní matici \underline{C} .

Existuje-li v odporové síti pouze jedna vazební podmínka, redukuje se matice \underline{F}^T a ${}^k \underline{F}$ na vektory \bar{F}^T a ${}^k \bar{F}$. Pak bude platit vztah mezi chybou vazby a Lagrangeovým členem

$$\lambda = C \cdot \delta_u F = \left[\bar{F}^T \cdot \underline{G}^{-1} \cdot {}^k \bar{F} \right]^{-1} \cdot \delta_u F,$$

přičemž koeficient C se dá dopočítat jako

$$C = \frac{\det(\underline{G})}{\det(\underline{G}^*)} = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{j=1}^{n+1} \lambda_j^*}, \quad (5.14)$$

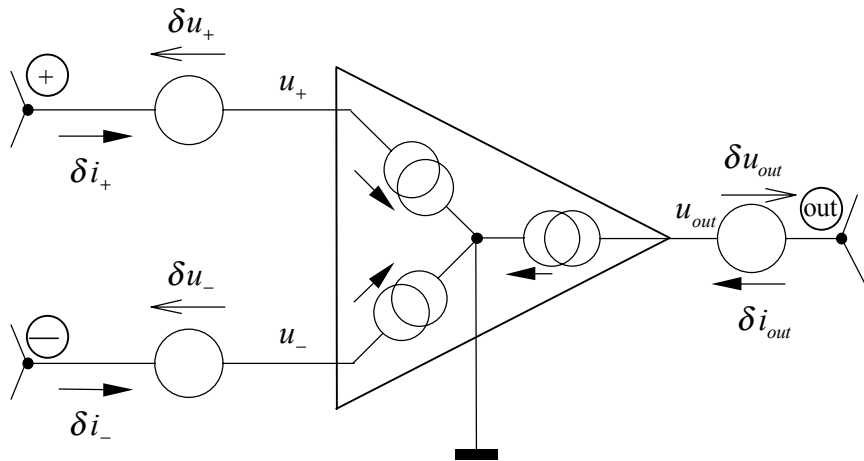
kde λ_i a λ_j^* jsou vlastní čísla matic \underline{G} a \underline{G}^* . V případě odporové sítě složené z kladných odporů bude matice \underline{G} symetrická a všechna její vlastní čísla λ_i budou reálná a kladná. Uvažujeme-li pro jednoduchost pouze reálná vlastní čísla i u matice \underline{G}^* , pak záporný koeficient C bude indikovat podle rovnice (5.14) pouze *lichý počet* záporných vlastních čísel matice \underline{G}^* . Bude-li tento počet sudý a různý od nuly, obvod bude DC nestabilní a v koeficientu C se to přitom neprojeví.

Napět'ový zesilovač

Vyjdeme z jednoduchého makromodelu napět'ového zesilovače, který zanáší do obvodu podmínku

$$f(u_{out}, u_+, u_-) = u_{out} - A \cdot (u_+ - u_-) = 0, \quad (5.15)$$

kde A je stejnosměrné zesílení.



Obr. 5.2.20: Modelování napěťového zesilovače

Proudy tekoucí přes vývody zesilovače budou podle vztahu (5.12)

$$\begin{bmatrix} \delta i_+ \\ \delta i_- \\ \delta i_{out} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} -A \cdot K_+ \\ A \cdot K_- \\ K_{out} \end{bmatrix},$$

kde K_+, K_-, K_{out} jsou konstanty sloužící k modelování nesymetrického chování zesilovače. Pro $K_+ = K_- = 0$ dostáváme zesilovač s nekonečným vstupním odporem, takže součástka se snaží splnit podmínku f pouze dodáváním proudu do výstupního uzlu. Podmínka $K_+ \neq K_-$ umožní modelovat proudovou nesymetrii vstupů.

Je-li zesilovač připojen k odporové síti s vodivostní maticí \underline{G} , můžeme psát soustavu obvodových rovnic rozšířených o vazební podmínku f

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \underline{G} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline -A \cdot K_+ \\ A \cdot K_- \\ K_{out} \\ \bar{0} \\ 0 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \bar{u} \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \bar{0} \\ \hline \delta_u f \\ \hline \end{array} \end{array}$$

\underline{G}^*

Pro jednoduchost jsme opět zvolili číslování uzlů počínaje vývody OZ. V obecném případě by došlo pouze k přeskupení posledního sloupce a řádku matice \underline{G}^* .

Informaci o DC stabilitě opět obsahuje „levý dolní“ člen matice \underline{G}^{*-1} , který jsme výše označili jako konstantu úměrnosti c . Celková virtuální rovnice pro všechny fluktuační bude

$$\begin{bmatrix} \delta i_+ \\ \delta i_- \\ \delta i_{out} \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} -A \cdot K_+ \\ A \cdot K_- \\ K_{out} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A & A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_+ \\ \delta u_- \\ \delta u_{out} \end{bmatrix} = \underline{g} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_+ \\ \delta u_- \\ \delta u_{out} \end{bmatrix}.$$

Matice g opět obsahuje pouze jedno nenulové vlastní číslo, které můžeme považovat za dominantní imitanci celého obvodu. Jeho poloha v levé polorovině komplexní roviny indikuje DC nestabilitu (viz úvahu k rovnici (5.14)).

Pokud modelujeme zesilovač s nekonečně velkým vstupním odporem, makromodel se zjednoduší na jeden řízený zdroj pracující do výstupu. Zdroj fluktuační postačí také jeden (do série s výstupem) a bude platit $\delta i_{out} = \lambda, K_{out} = 1$.

Virtuální rovnice bude jednorozměrná

$$\delta i_{out} = c \cdot \delta u_{out}.$$

Postačující podmínka DC nestability zní

$$c < 0.$$

Obecný dvojbran

Často pracujeme s dvojbranem, které jsou charakterizovány svými konstantami vypočtenými pro aktuální pracovní bod. Také každý dvojbran přináší do obvodu zpětné vazby, které mohou být podle způsobu zapojení pro DC nebo obecnou stabilitu nebezpečné.

Dále uvedený postup ukazuje, jak se dá jeden dvojbran začlenit do obvodových rovnic, ze kterých lze určit virtuální matici.

Uvažujme dvojbran, který zavádí do obvodu dvě vodivostní podmínky

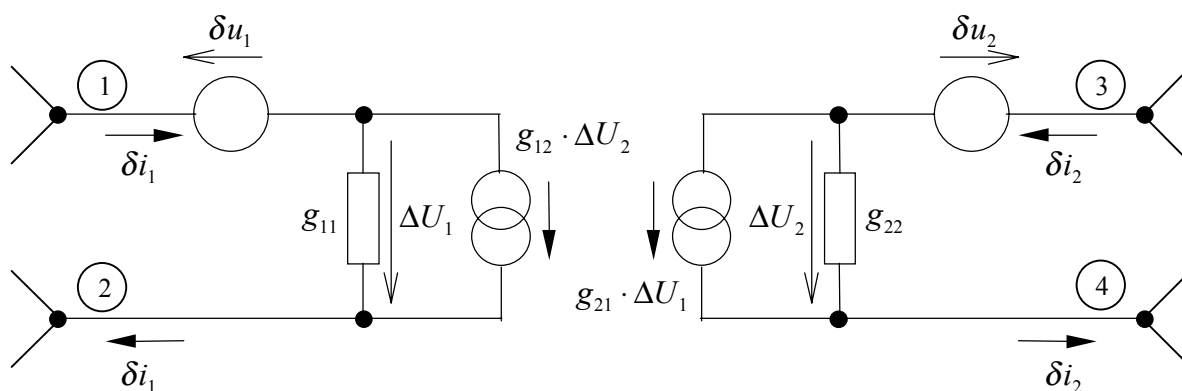
$$f_1 = g_{11} \cdot \Delta U_1 + g_{12} \cdot \Delta U_2 - \delta i_1 = 0,$$

$$f_2 = g_{21} \cdot \Delta U_1 + g_{22} \cdot \Delta U_2 - \delta i_2 = 0$$

neboli maticově

$$\vec{F} = \underline{g} \cdot \Delta \vec{U} - \delta \vec{i} = \vec{0}.$$

K dvojbranu přidáme zdroje napěťových fluktuačních podle obr. 5.2.21 a celý jej vložíme do odporové sítě (znázorněno uzly ① až ④).



Obr. 5.2.21: Vložení dvojbranu do obvodu

Obvodové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc|cc|cc}
 & & 1 & 0 & & \\
 & & -1 & 0 & & \\
 & & 0 & 1 & & \\
 & & 0 & -1 & & \\
 & & \vec{0} & \vec{0} & & \\
 \hline
 -g_{11} & g_{11} & -g_{12} & g_{12} & \vec{0}^T & 0 & 0 \\
 -g_{21} & g_{21} & -g_{22} & g_{22} & \vec{0}^T & 0 & 0 \\
 \hline
 & & & & & \lambda_1 & \delta_u f_1 \\
 & & & & & \lambda_2 & \delta_u f_2
 \end{array} \\
 \underline{G}^*
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \vec{u} \\
 \hline
 \lambda_1 \\
 \lambda_2
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \vec{0} \\
 \hline
 \delta_u f_1 \\
 \delta_u f_2
 \end{array}$$

V tomto případě jsme opět použili první uzly vektoru pro všechny vývody dvojbranu. Nebudeme dvojbran nijak omezovat konstantami K , proto platí přímo

$$\lambda_1 = \delta i_1, \lambda_2 = \delta i_2.$$

Inverzní rovnice dá

$$\begin{array}{c}
 \vec{u} \\
 \hline
 \delta i_1 \\
 \delta i_2
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \underline{G}^{*-1} \\
 \hline
 \underline{C}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \vec{0} \\
 \hline
 \delta_u f_1 \\
 \delta_u f_2
 \end{array}$$

z čehož plyne

$$\begin{bmatrix} \delta i_1 \\ \delta i_2 \end{bmatrix} = \underline{C} \cdot \begin{bmatrix} \delta_u f_1 \\ \delta_u f_2 \end{bmatrix} = \underline{C} \cdot \underline{g} \cdot \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

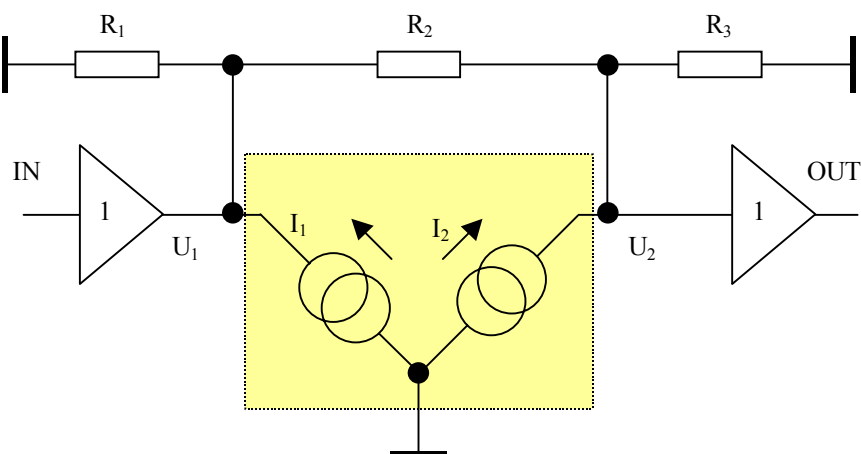
Z rovnice (5.16) je vidět, že informaci o DC stabilitě dávají vlastní čísla matice \underline{C} , resp. $\underline{C} \cdot \underline{g}$.

Každý dvojbran tedy přináší dvě vlastní imitance, protože musí být testován dvěma fluktuacemi. Tento počet jde samozřejmě ve speciálních případech zredukovat, pokud je jeden zdroj fluktuace společný pro více dvojbranů.

Perspektivy metody

Předkládaná metoda je postavena natolik obecně, že dovoluje otestovat velmi široký okruh DC systémů, především však takových, ve kterých se vyskytují prvky zanášející do obvodu vazby typu „vstup – výstupní charakteristika“, „n-branové rovnice“ a vůbec součástky popisované metodami „behavioral modelling“. Dovoluje testovat i zapojení s hypotetickými prvky, které jsou známy pouze svým požadovaným chováním. Metoda navíc dává návod k jejich realizaci. Příkladem může být třísvorkový prvek z obr. 5.2.22, který zajišťuje trvalou platnost podmínky $U_2 - A \cdot U_1 = 0$.

Sami si můžeme zvolit, kde bude vstup a kde výstup a připojit se k těmto místům přes oddělovací zesilovače.



Obr. 5.2.22. Prvek udržující danou podmínku

Obvod dodržující danou podmínku lze syntetizovat pomocí zdrojů proudu I_1 a I_2 , které jsou odvozeny od základního proudového zdroje λ podle předpisu

$$I_1 = -A \cdot \lambda \cdot K_1, \quad I_2 = \lambda \cdot K_2,$$

zdroj proudu λ se nastaví na správnou hodnotu podle konfigurace odporové sítě. Konstanty K_1 a K_2 jsou váhy od 0 do 1, kterými můžeme ovlivnit míru, s jakou se podílejí oba přívody makroobvodu na splnění podmínky. Pro $K_1=0$ a $K_2 \neq 0$ dostaneme ideální zesilovač napětí se zesílením A se vstupem v uzlu 1 a výstupem v uzlu 2 (viz případ a) na obr. 5.2.18). Pro $K_1 \neq 0$ a $K_2=0$ vznikne ideální zesilovač napětí se zesílením A^{-1} a se vstupem v uzlu 2 a výstupem v uzlu 1 (viz případ b) na obr. 5.2.18). Jestliže zvolíme $K_1=K_2 \neq 0$, dostaneme prvek, který se chová jako „DC transformátor“. Nezavádí do obvodu žádnou neregiprocitu a nezpůsobuje ani DC nestabilitu.

Součástky syntetizované tímto způsobem vykazují řadu zvláštních vlastností, z nichž mnohé jsou DC analogiemi vlastností známých z časové a frekvenční oblasti.

Metoda také ukazuje, že příčinou DC nestability bývá neregiprocitní realizace žádaných vazebních podmínek, což bude rozvedeno dále.

DC stabilita a říditelnost

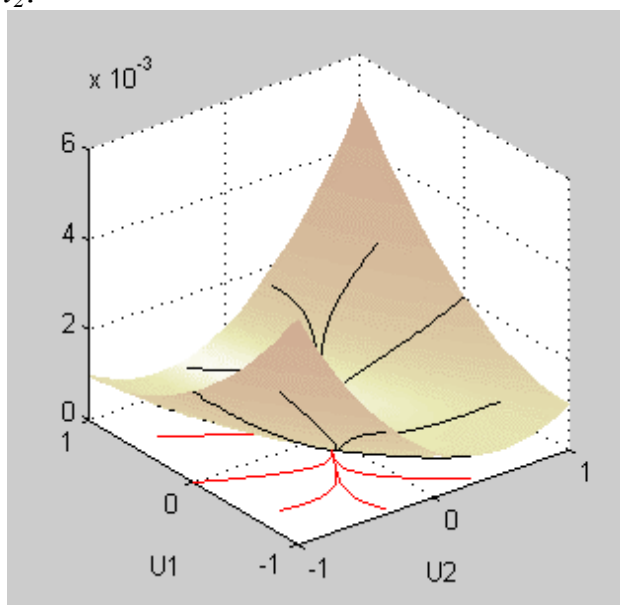
Syntéza obecného řešení c) z obr. 5.2.18 vyplyne z řešení extrémální úlohy na stacionaritě disipačního potenciálu při zachování vazební podmínky. Hledáme takovou virtuální trajektorii, která svým dalším pokračováním nejen minimalizuje velikost disipačního potenciálu (plocha na obr. 5.2.23), ale navíc zůstává na nadrovině $f(\vec{u})=0$ (vazební přímka $U_2 - A \cdot U_1 = 0$ na obr. 5.2.24). Jde o úlohu na vázaný extrém řešitelnou pomocí Lagrangeových multiplikátorů λ . Pohybové rovnice se získají z gradientu modifikovaného potenciálu

$$\nabla \Phi^* \Big|_{\delta \vec{u}} = \nabla (\Phi - \lambda f) \Big|_{\delta \vec{u}} = \vec{0}$$

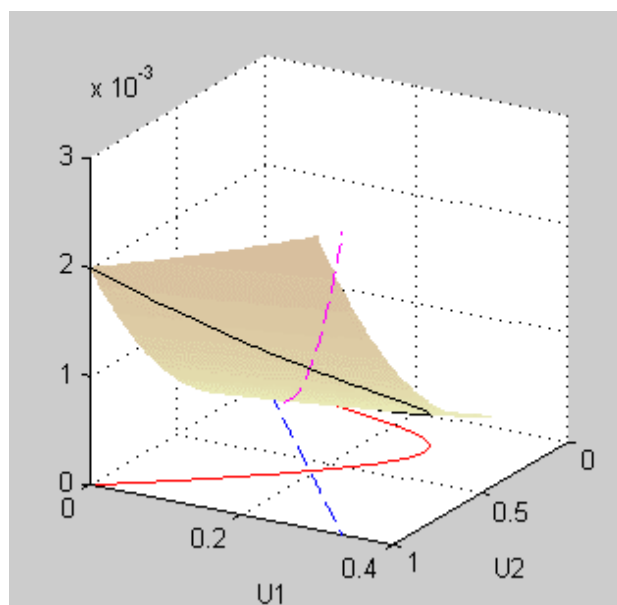
neboli

$$\underline{G} \cdot \vec{u} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \vec{0}.$$

Po vyjádření naznačených derivací vyjde $i_1 = -A \cdot \lambda$, $i_2 = \lambda$. Neurčitý multiplikátor má fyzikálně význam proudu dodávaného zdrojem, který slouží jako reference pro odvození proudů i_1 a i_2 .

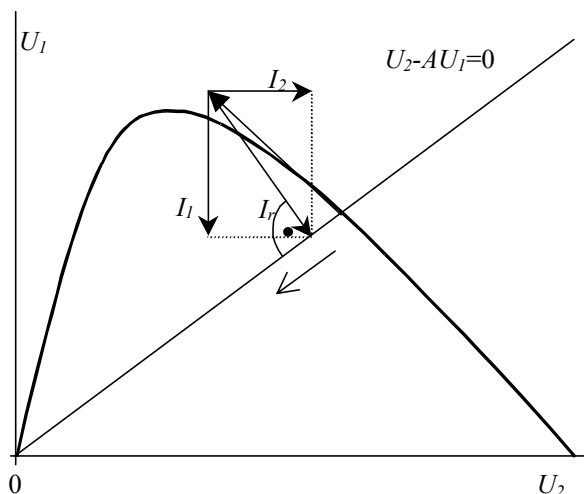


Obr. 5.2.23: Disipační potenciál a virtuální trajektorie

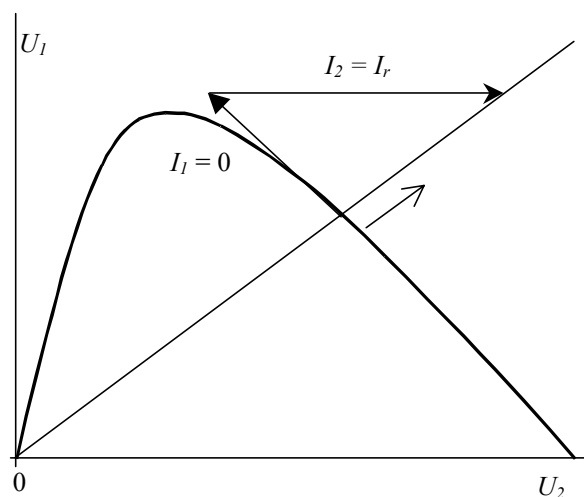


Obr. 5.2.24: Znáznornění vazby

Je evidentní, že výsledná trajektorie bude sledovat vazební přímku, ale pro stabilitu bude rozhodující její směr. Situaci znázorňuje obr. 5.2.25. Z původního proudu $\vec{i} = -\nabla\Phi|_{\delta\vec{u}}$ se nyní může uplatnit pouze jeho průmět do směru jediného možného virtuálního pohybu, tj. průmět do směru vazební přímky. Virtuální trajektorie se bude ubírat ve směru tohoto průmětu, tj. k počátku souřadnic. Daný bod je proto DC stabilní. Proudů i_1 a i_2 jsou složkami reakce vazby i_r , která je kolmá k možnému pohybu a neodevzdává žádný výkon.



Obr. 5.2.25: Přirozená reakce vazby – DC stabilita



Obr. 5.2.26: Omezená reakce vazby – DC nestabilita

Obr. 5.2.26 ukazuje situaci, kdy se snažíme splnit vazební podmínku za použití napěťového zesilovače s nekonečným vstupním odporem, tj. pouze buzením do uzlu ②. Jelikož nelze zajistit kolmost reakčního proudu k dané vazbě (chybí zde možnost ovlivnit souřadnici i_1), dodává reakce do obvodu proudem i_2 virtuální výkon a trajektorie se od rovnovážného stavu vzdaluje. Tento bod je DC nestabilní.

Příčinou DC nestability je v tomto případě nreciprocitní realizace žádané vazební podmínky. Evidentní je to u prvků, které zajišťují danou podmínku jen jedním vývodem, jako je tomu např. u operačních zesilovačů. Základní příčinou DC nestability je tedy skutečnost, že systém se stává za daných podmínek neřiditelným (vektor řízení je neúplný).

5.2.8 DC principy v nelineárních obvodech

Dále se zaměříme na vyhledávání DC analogií Ljapunovových metod testování stability. První Ljapunovova metoda vychází z linearizovaného modelu, druhá počítá

s nelineárním modelem a přináší pojem Ljapunovovy funkce. Dotkneme se také některých metod pro generování Ljapunovovy funkce, zvláště pak Lurjeho metody.

DC analogie první Ljapunovovy metody

Věty první Ljapunovovy metody říkají, do jaké míry můžeme ze stability linearizovaného modelu usuzovat na stabilitu skutečného nelineárního systému. Odpovídají na otázku, jaký vliv mají na stabilitu členy, které byly při linearizaci zanedbány (viz [45]). Následují některé zásadní poznatky:

Leží-li všechny kořeny charakteristické rovnice linearizované soustavy v levé komplexní polorovině, je skutečný systém lokálně stabilní.

Leží-li byť i jen jediný kořen charakteristické rovnice v pravé komplexní polorovině, je skutečný systém nestabilní.

Leží-li některý kořen charakteristické rovnice na imaginární ose, nelze o stabilitě skutečného systému rozhodnout na základě linearizovaného modelu.

Stabilita se přitom definuje jako schopnost systému vrátit se do rovnovážného stavu, jestliže skončilo působení poruchy, která jej z tohoto stavu vychýlila. Tvary trajektorií, po kterých se tento návrat uskutečňuje, jsou v těsném okolí rovnovážných stavů přesně dány polohou kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině. Podle typu trajektorie pak i zde dělíme rovnovážné body na ohniska, uzly, středy a sedla.

U ryze DC obvodů nemůžeme sledovat časové trajektorie. Pomocí termodynamického přístupu lze však studovat tzv. virtuální trajektorie, které udávají tendence systému kolem rovnovážného bodu. Tyto trajektorie ukazují, jakým způsobem se likvidují nebo naopak rozvíjejí skutečné fluktuace od rovnováhy. Tvar těchto virtuálních trajektorií je jednoznačně dán polohou vlastních čísel virtuální matice v komplexní rovině a je totožný s tvarem trajektorií klasických dynamických systémů uvedených na obr. 2.1.1.

Na základě těchto analogií můžeme stanovit následující definici DC stability:

Věta 5.17: DC stabilita je schopnost systému likvidovat virtuální odchylky od rovnovážného bodu po virtuální trajektorii.

Dále můžeme stanovit DC analogii první Ljapunovovy metody:

Věta 5.18: Leží-li všechna vlastní čísla virtuální matice linearizované soustavy v *pravé* komplexní polorovině, je skutečný systém lokálně *stabilní*.

Leží-li byť i jen jediné vlastní číslo virtuální matice v levé komplexní polorovině, je skutečný systém nestabilní.

Leží-li některé vlastní číslo virtuální matice na imaginární ose, nelze o stabilitě skutečného systému rozhodnout na základě linearizovaného modelu.

DC analogie druhé Ljapunovovy metody

Druhá Ljapunovova metoda převádí zkoumání směru trajektorií kolem rovnovážného bodu na zkoumání aktuální hodnoty skalární funkce stavu. Základní myšlenky metody by se daly shrnout takto:

Jestliže lze k danému systému nalézt takovou definitní Ljapunovovu funkci stavu, aby její časová derivace byla při vlastním pohybu také definitní, ale s opačným znaménkem, je daný systém asymptoticky stabilní. Semidefinitní časová derivace znamená pouhou stabilitu.

Jestliže časová derivace Ljapunovovy funkce je definitní, přičemž Ljapunovova funkce má v libovolné malé oblasti kolem rovnovážného bodu stejné znaménko jako její časová derivace, je daný systém nestabilní.

Myšlenka je tedy prostá: hodnota funkce, která např. roste s rostoucí vzdáleností od rovnovážného bodu, musí u stabilního systému při skutečném pohybu monotónně klesat. Hodnotou jediné skalární funkce tak můžeme pohodlně sledovat tendence všech možných trajektorií.

U DC obvodů platí princip minimální produkce entropie, který zaručuje, že DC stabilní rovnovážný stav leží na dně disipační jámy, po jejíchž stěnách se likvidují všechny fluktuace. Tvar disipační jámy může být vyjádřen disipačním potenciálem jako funkcí stavu. DC obdoba druhé Ljapunovovy funkce by tedy mohla vypadat takto:

Věta 5.19: Jestliže lze k danému systému nalézt takovou definitní Ljapunovovu funkci stavu, aby její derivace podle směru virtuální trajektorie byla také definitní, ale s opačným znaménkem, je daný systém asymptoticky DC stabilní. Semidefinitní derivace znamená pouhou DC stabilitu.

Jestliže je derivace Ljapunovovy funkce podle směru virtuální trajektorie definitní, přičemž Ljapunovova funkce má v libovolné malé oblasti kolem rovnovážného bodu stejné znaménko jako její derivace, je daný systém DC nestabilní.

U systémů, kde jsme ztratili kontakt s fyzikálním pozadím jevů, bývá obtížné nalézt Ljapunovovu funkci. U DC systémů toto nebezpečí nehrozí. Ze samotného faktu, že k DC obvodu přistupujeme jako k termodynamickému systému, plyne následující tvrzení:

Věta 5.20: Ljapunovovou funkcí DC obvodu je jeho disipační potenciál.

Hledání disipačního potenciálu jako globální funkce stavu může být velmi obtížnou úlohou, avšak pro posouzení lokální DC stability se bez ní naštěstí obejdeme. Dobrou představu o průběhu potenciálu v okolí rovnovážného stavu dává kvadratická forma, jejímž jádrem je virtuální matice.

DC analogie Lurjeho metody

Lurje navrhl metodu generování Ljapunovovy funkce pro systémy obsahující jeden nelineární a několik lineárních členů. Funkce se hledá ve tvaru součtu kvadratické formy stavu a integrálu z dané nelinearity. Pomineme-li značnou komplikovanost konkrétního provedení této metody, je možno vidět značnou podobnost mezi tímto přístupem a způsobem, jak nalézt průběh disipačního potenciálu u nelineárního DC obvodu.

Budeme-li zkoumat virtuální pohyb ve stavovém prostoru uzlových napětí, pak bude další směr virtuální trajektorie dán vektorem proudové reakce

$$\delta \vec{i} \approx -\frac{\partial P}{\partial \vec{u}}, \quad (5.17)$$

tj. virtuální pohyb se děje proti směru gradientu disipačního potenciálu P . Tento potenciál (neboli Ljapunovova funkce) musí být tedy integrální funkcí

$$P(\vec{u}) = \int_{\Gamma} \vec{i}^T(\vec{v}) \cdot d\vec{v}, \quad (5.18)$$

kde integrační dráhou je křivka začínající v rovnovážném bodě. Nutno poznamenat, že funkce $\vec{i}(\vec{u})$ by měla být v okolí rovnovážného bodu potenciální, jinak by totiž velikost potenciálu (5.18) závisela na integrační cestě. Tento předpoklad však nebývá splněn ani v linearizovaném případě u nereziprocity obvodů, kde relace mezi vektory proudu a napětí je dána nesymetrickou imitanční maticí. Řešení takové situace bylo nastíněno v části 5.2.2.

Předpokládejme nyní lineární DC obvod s jedním nelineárním rezistorem s charakteristikou

$$i_R = i_R(u_R).$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že u_r je zároveň uzlovým napětím. Lineární část obvodu necht' má vodivostní matici \underline{G} . Disipační potenciál bude

$$P(\vec{u}) = \int_{\Gamma} (\underline{G} \cdot \vec{v})^T \cdot d\vec{v} + \int_{u_{R0}}^{u_R} i_R(\sigma) \cdot d\sigma,$$

kde σ je integrační proměnná pro napětí u_R a integrační cesta Γ končí vektorem \vec{u} . Všimněme si, že integrál je vlastně podle *Definice 2.3* disipační kofunkcí nelineárního rezistoru. V případě potenciálnosti matice \underline{G} dostaneme z lineární části kvadratickou formu, takže

$$P(\vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u}^T \cdot \underline{G} \cdot \vec{u} + \int_{u_{R0}}^{u_R} i_R(\sigma) \cdot d\sigma.$$

Tato podoba Ljapunovovy funkce se může stát východiskem pro zkoumání tvaru virtuálních trajektorií v okolí rovnovážného bodu.

5.2.9 Zobrazování virtuálních trajektorií

U lineárních nebo linearizovaných obvodů, kde známe virtuální matici, je zobrazení virtuální trajektorie poměrně snadné. Náročnější je situace v nelineárních nereziprocity obvodech, kde jsme odkázáni většinou na numerickou analýzu prostřednictvím simulačních programů. Probereme si zvláště oba případy.

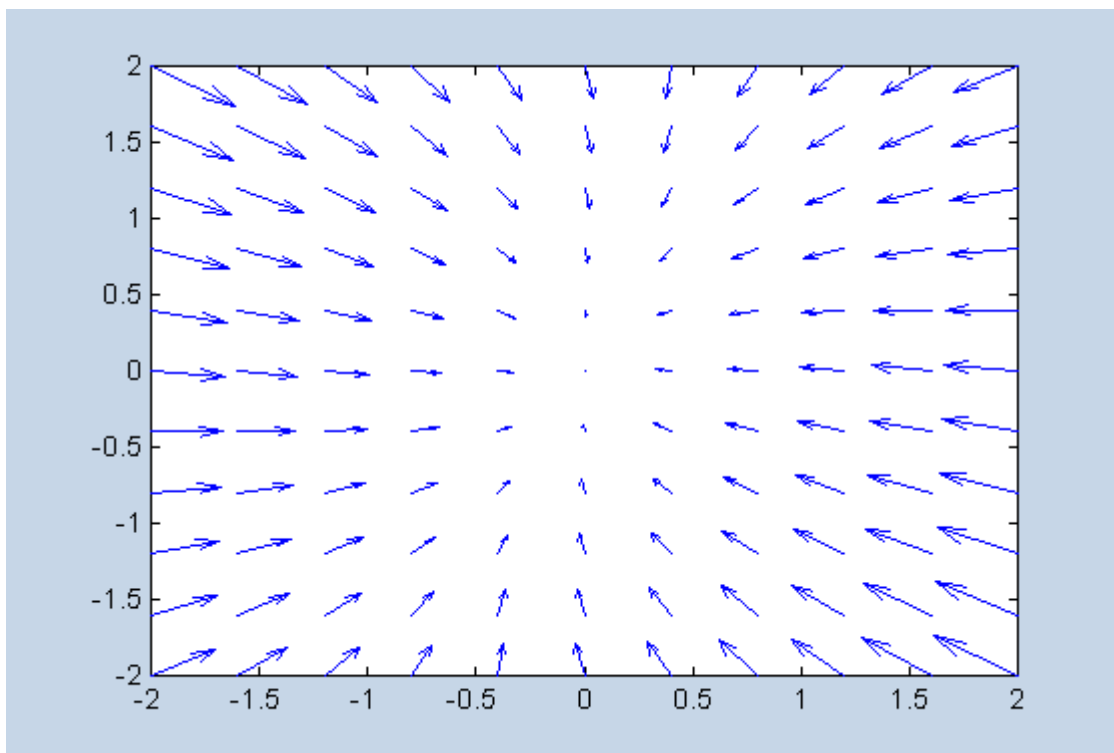
Lineární obvody

Algoritmy umožňující vykreslení virtuálních trajektorií nebo plochy disipačního potenciálu vycházejí ze znalosti virtuální matice.

Problematiku vysvětlíme na příkladu. Necht' je relace mezi vektorem napěťových \vec{u} a proudových \vec{i} odchylek dána virtuální rovnicí $\vec{i} = \underline{G} \cdot \vec{u}$ jako

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Podle vztahu (5.2) je směr virtuální trajektorie v každém bodě roviny (u_1, u_2) dán vektorem $-\vec{i}$. Algoritmus pro vykreslení směrového pole v prostředí MATLAB je v Příloze A, výsledek je uveden na obr. 5.2.27.



Obr. 5.2.27 Pole směrových vektorů

Virtuální trajektorie procházejí ve směru těchto vektorů a všechny končí v počátku souřadné soustavy, který v tomto případě představuje DC stabilní rovnovážný bod. Tvar trajektorií ukazuje na rovnovážný bod typu *uzel*.

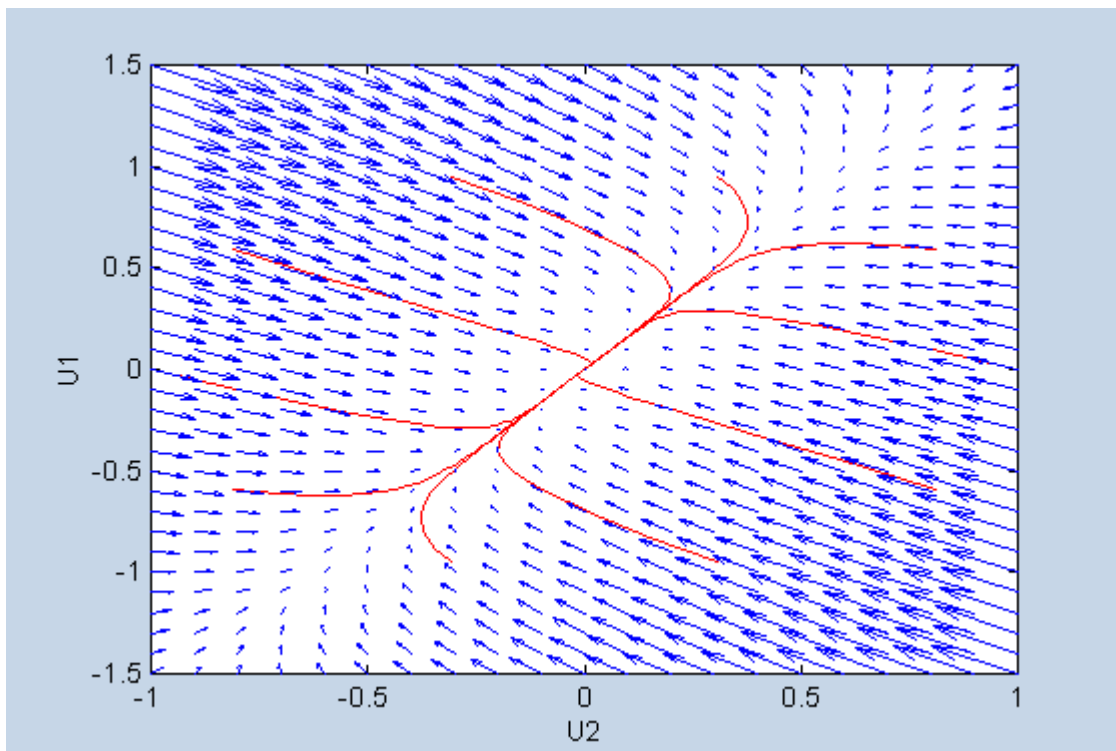
Z obecného hlediska znázorňuje směrové pole termodynamické tendence stejnosměrného obvodu vychýleného z rovnováhy. DC stabilní bod tedy vykazuje „přitahovací“ schopnost pro všechny fluktuace kolem rovnováhy. Intenzita tohoto „přitahování“ klesá tím více, čím více se trajektorie přibližuje ke stabilnímu rovnovážnému bodu, v rovnováze zaniká.

Algoritmus pro vykreslování virtuální trajektorie vychází také ze vztahu (5.2) a nahrazuje tuto trajektorii úseky složenými ze směrových vektorů aktuálních v daném místě. Algoritmus napsaný pro prostředí MATLABu je uveden v Příloze B a vykreslí virtuální trajektorie vycházející z libovolného místa odchylky. Na obr. 5.2.28 vidíme současně vykreslené virtuální trajektorie spolu se směrovými vektory pro případ virtuální matice

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0.002 & -0.001 \\ -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

Zkoumaný rovnovážný bod je opět DC stabilní a je to zase *uzel*.

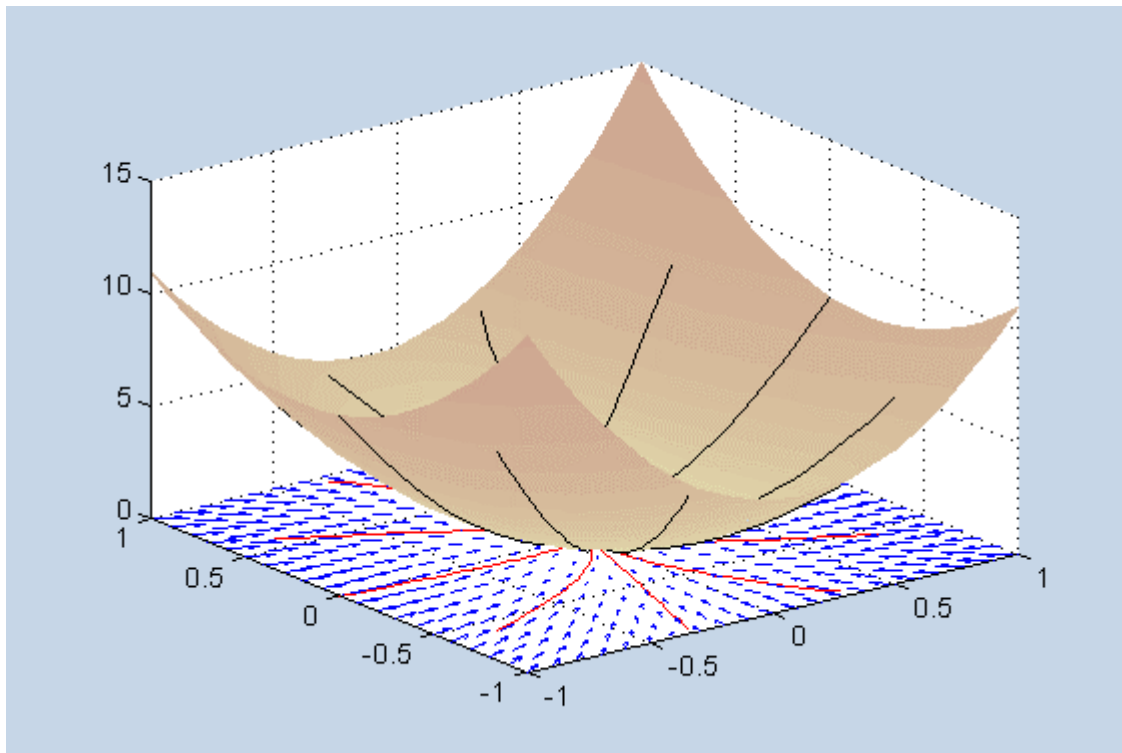
Uvedené algoritmy samozřejmě vykreslují i trajektorie nereciprocních obvodů, kdy virtuální matice je nesymetrická. V případě DC nestability by trajektorie směřovaly pryč od nestabilního bodu.



Obr. 5.2.28 Virtuální trajektorie v poli směrových vektorů

Pohyb po virtuální trajektorii je důsledkem zákona minimální produkce entropie (viz oddíly 4.3.2, 5.2.1 a 5.2.2) a děje se proti směru disipačního potenciálu, který jde znázornit plochou. Podíváme-li se pozorně na obr. 5.2.27, uvědomíme si, že se díváme z ptáčích perspektivy do disipační jámy, po jejíž stěnách se likvidují fluktuace.

Algoritmus pro vykreslení stěn této disipační jámy je uveden v Příloze C, výsledek vidíme na obr. 5.2.29. Algoritmu bylo použito i pro vykreslení obr. 5.2.23 a 5.2.24.



Obr. 5.2.29 Plocha disipačního potenciálu

Nelineární obvody

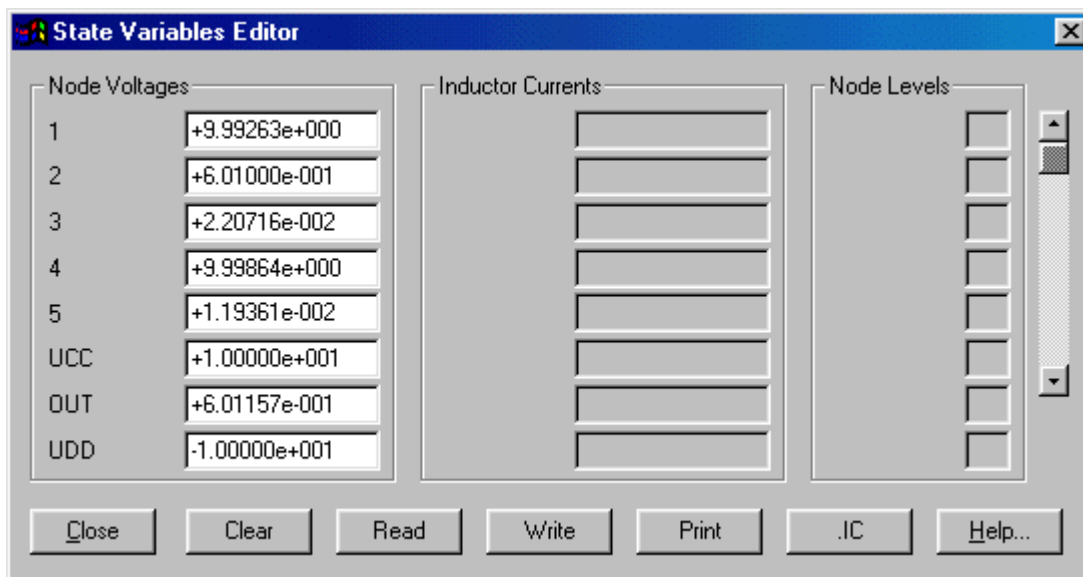
Virtuální trajektorii nelineárního obvodu lze teoreticky získat řešením nelineární verze diferenciální rovnice (5.2)

$$\frac{d\vec{U}(s)}{ds} = -\vec{f}(\vec{U}(s)), \quad (5.19)$$

kde \vec{U} je stavový vektor a s je parametr virtuální trajektorie. Rovnice (5.19) je však v praxi nepoužitelná, neboť nelinearitu většinou neumíme vyjádřit explicitní funkcí \vec{f} . Hledat matematické vyjádření této nelinearity pro každý zvláštní případ by navíc nebylo ani únosné. V další části práce si ukážeme, jak postupovat při hledání virtuální trajektorie za použití běžných simulačních programů typu MicroCap.

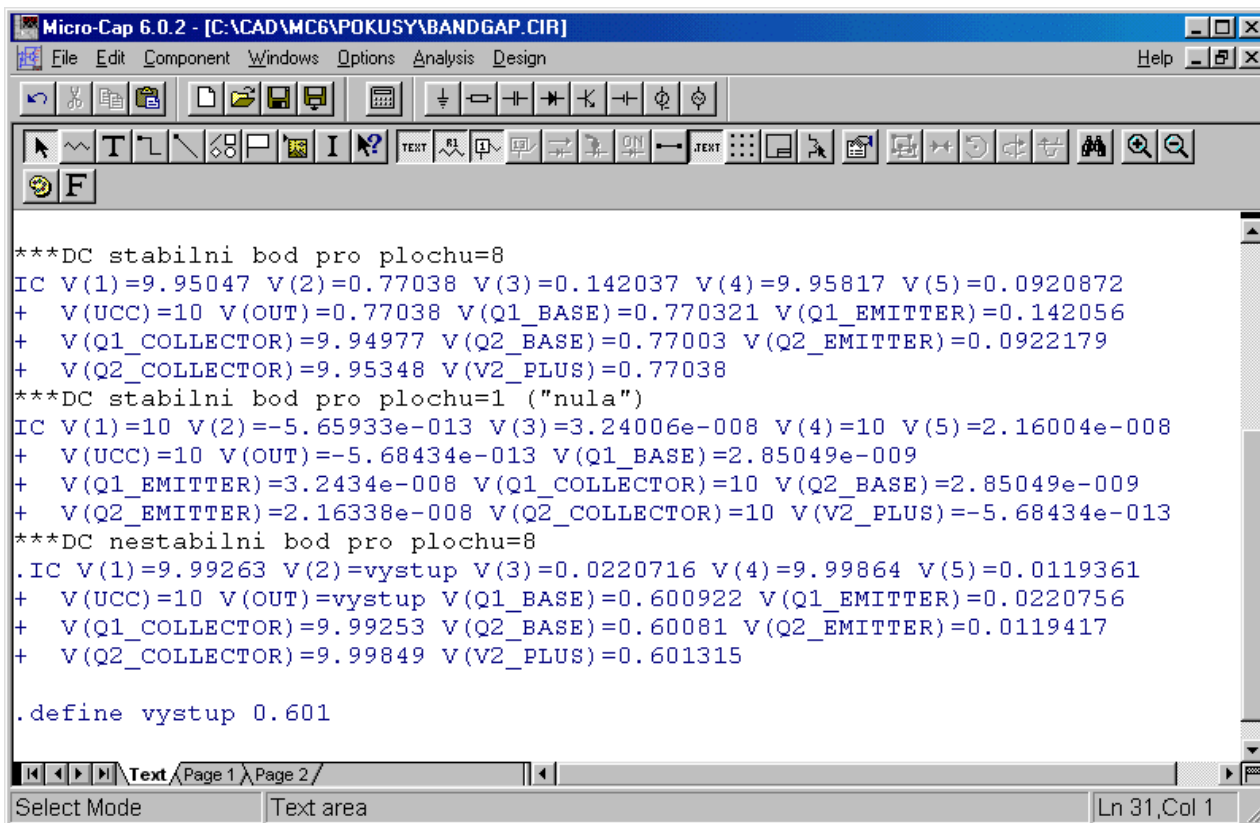
V části 5.1.4 byla analyzována stabilita Brokawovy band-gap buňky, jejíž schéma je uvedeno na obr. 5.1.7. Byly zjištěny tři rovnovážné body, z nichž dva jsou stabilní a jeden nestabilní. Načtneme postup pro vykreslení virtuálních trajektorií kolem nestabilního bodu. K analýze bylo použito obvodového simulátoru MicroCap VI.

Nestabilní bod je charakterizován vektorem obvodových veličin, které jsou představeny na obr. 5.2.30 v prostředí editoru stavových proměnných.



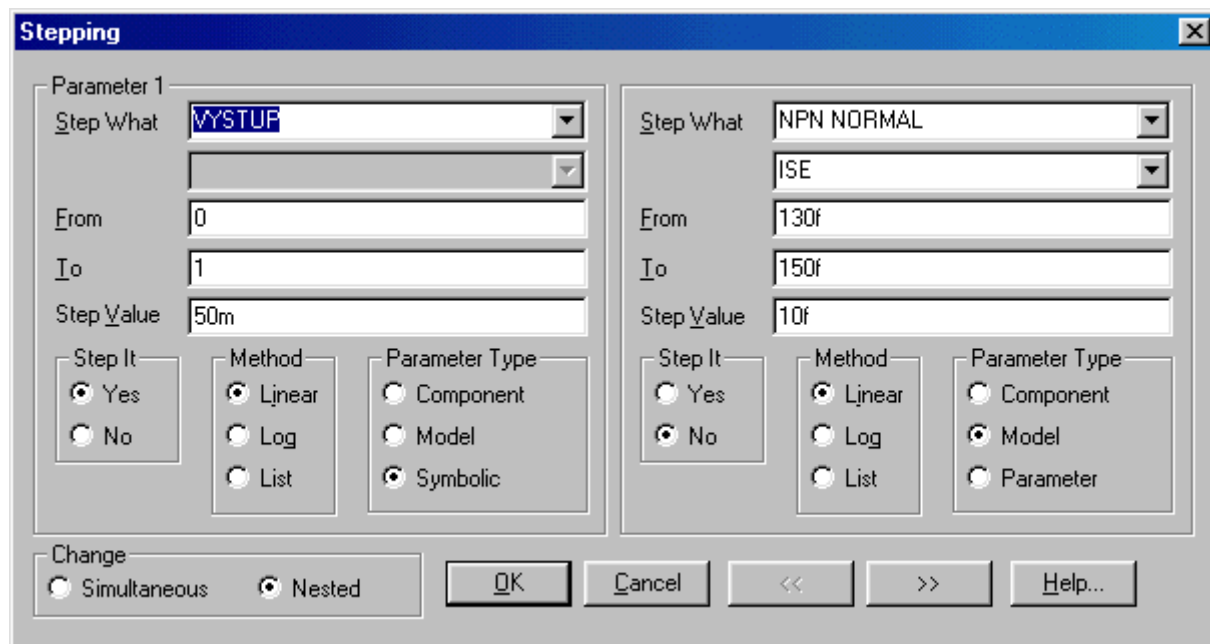
Obr. 5.2.30 Obvodové veličiny v DC nestabilním bodu

Pro rychlé nastavení obvodu do tohoto stavu při dalších analýzách lze využít příkazu `.IC` (Initial Condition) z repertoáru SPICE. Výsledek generování tohoto příkazu přímo z prostředí editoru stavových proměnných je ukázán na obr. 5.2.31. Příkaz je dále upraven tak, abychom mohli ovlivňovat počáteční nastavení napětí ve vybraném uzlu, v tomto případě na výstupu band-gap buňky.



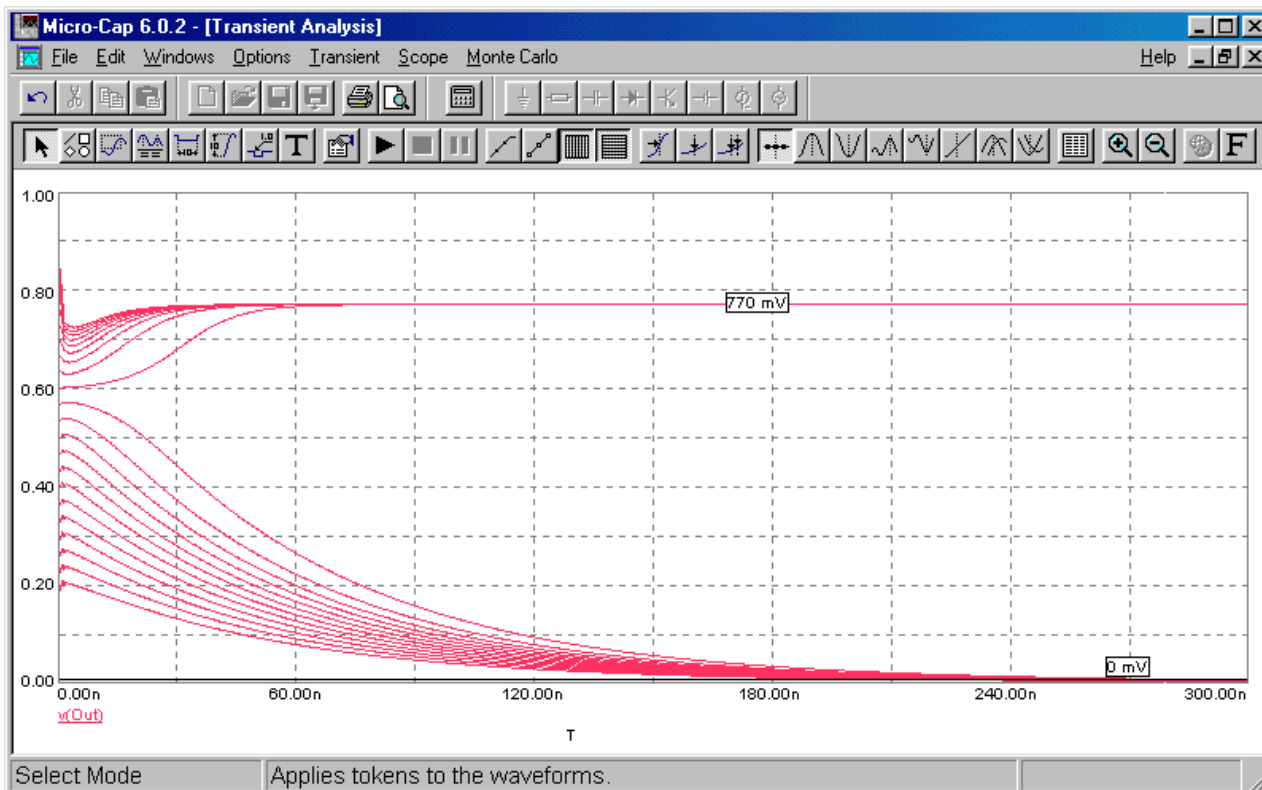
Obr. 5.2.31 Nastavení žádaných počátečních podmínek

Definice proměnné *vystup* nám umožní měnit počáteční hodnotu výstupního napětí. Proveďte se to pomocí tzv. krokování symbolické proměnné, jak je ukázáno na obr. 5.2.32.



Obr. 5.2.32 Krokování symbolické proměnné

Budeme nyní analyzovat náběhy obvodu pokaždé s jinou počáteční hodnotou výstupního napětí buňky. Výsledky experimentu ukazuje obr. 5.2.33.



Obr. 5.2.33 Náběhy do pracovních bodů

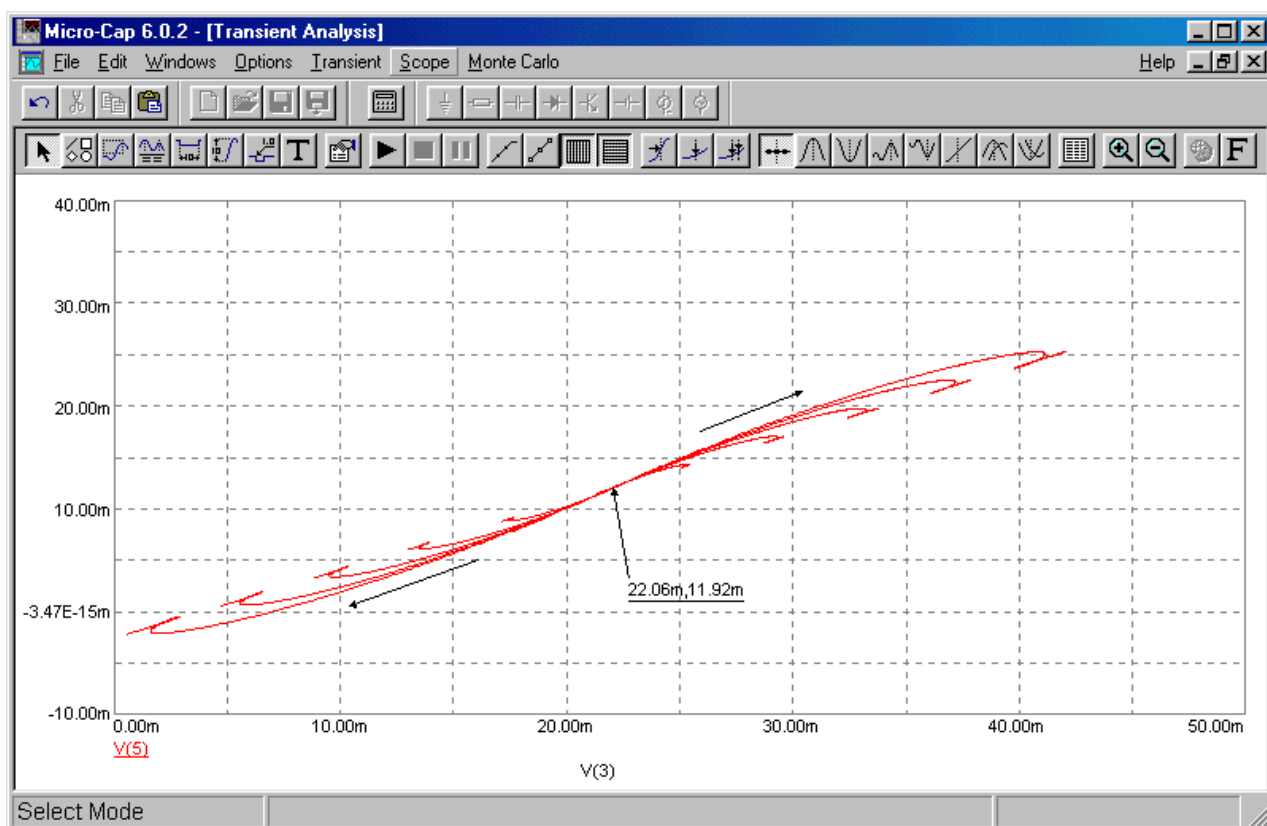
Ukazuje se, že rovnováha při výstupním napětí 601 mV je nestabilní a že jakákoli odchylka od tohoto bodu vede do jednoho ze dvou stabilních bodů (výstupní napětí 0 V a 770 mV).

Vybereme si dvě obvodové veličiny, abychom jejich prostřednictvím prozkoumali pohyb systému kolem nestabilního bodu. Budou to např. napětí emitorů obou tranzistorů proti zemi (zastoupeno uzly 3 a 5 na obr. 5.1.7). V rovinné souřadné soustavě, kde na obou osách budou tato napětí, se odpuzování od nestabilního bodu projeví jako pohyb po odpovídající trajektorii.

Výsledek pro velmi krátké časy (těsné okolí nestabilního bodu) vidíme na obr. 5.2.34. Šipkou je zvýrazněn nestabilní bod, ve kterém jsou napětí $V(3)=22,06$ mV a $V(5)=11,92$ mV.

Tvar trajektorie je poznamenán přechodným jevem, který je zase ovlivněn způsobem zadání počátečních podmínek. Obvod má svoji dynamiku způsobenou reaktančními vlivy a tato dynamika reaguje na *celý* vektor parametrů obsažených v příkazu `.IC` (podle obr. 5.2.31). Zjednodušeně řečeno lze nejen nastavit počáteční hodnotu veličiny, ale ostatními parametry lze ovlivnit i její počáteční derivace. Pak by šlo docílit toho, že trajektorie na obr. 5.2.33 by sice vycházely ze stejných počátečních bodů, avšak jejich další pokračování by mohlo být poněkud jiné.

Trajektorie, u které se podaří vhodným výběrem počáteční podmínky redukovat projevy vlastní dynamiky obvodu na minimum, se bude nejlépe podobat virtuální trajektorii.



Obr. 5.2.34 Skutečné trajektorie kolem nestabilního bodu

Vyšetřovaná rovnováha podle obr. 5.2.34 je typu *nestabilní uzel*.

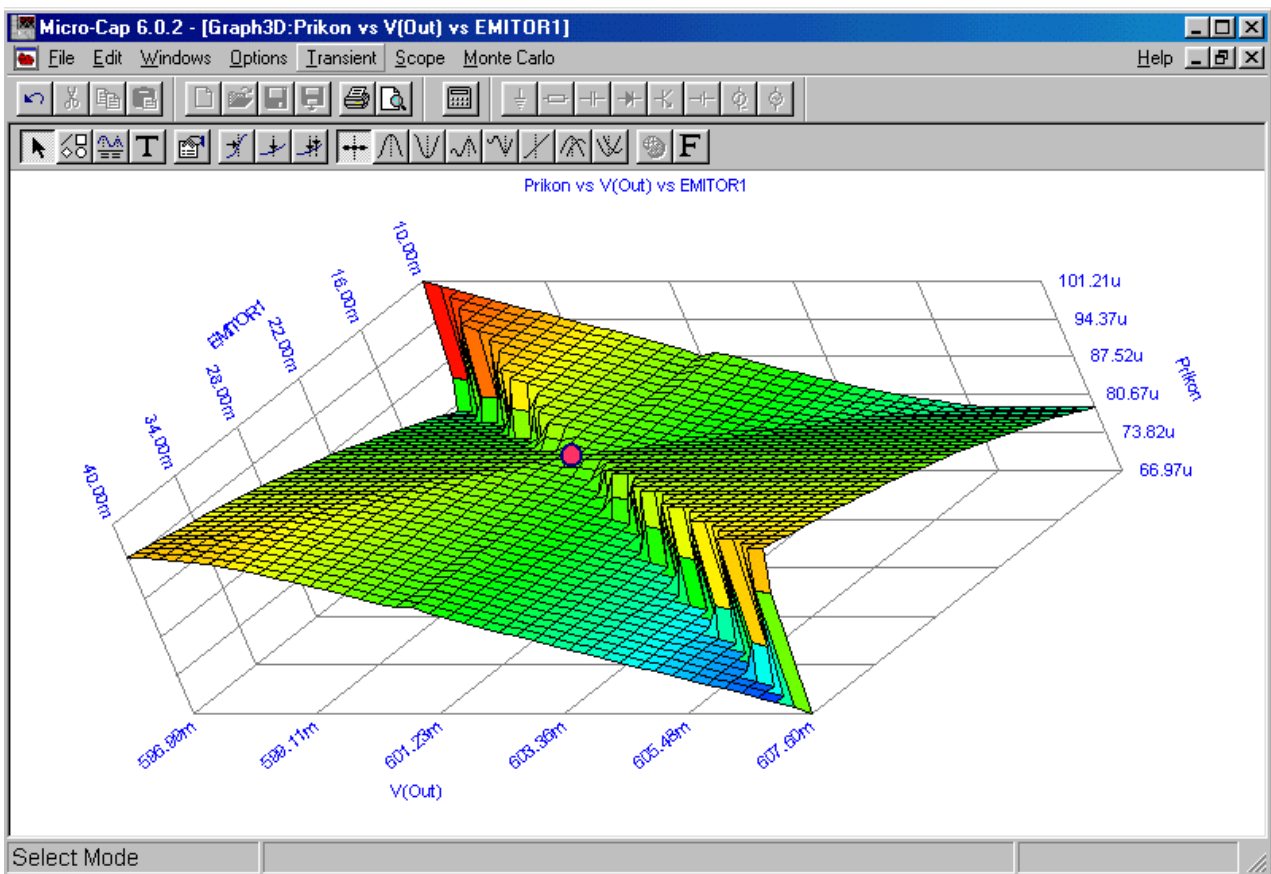
Výše uvedené potíže s vlastní dynamikou obvodu by se daly odstranit tím, že bychom vychylovali systém z rovnováhy zdroji *stejnoseměrných* odchylek a místo časové analýzy bychom použili analýzu stejnosměrnou. Pro každou odchylku by se spočítal nový rovnovážný bod, který by představoval další bod virtuální trajektorie. Tato metoda sice přináší u některých obvodů dobré výsledky, většinou však narazíme na vážné problémy s konvergencí výpočtů.

Složitějším problémem je vykreslit plochu disipačního potenciálu. Přitom jde o úlohu vysloveně praktického charakteru. Poskytla by nám totiž obraz o rozložení energií mezi jednotlivé rovnovážné body a tudíž bychom získali představu o způsobu, jak dochází k náběhu do skutečného pracovního bodu. Rovnovážné body jsou totiž umístěny ve stacionárních bodech disipačního potenciálu, což mohou být lokální minima, maxima nebo sedla. Pohyb od jednoho pracovního bodu ke druhému pak může vyžadovat přísun vnější energie nutné pro překonání potenciálových valů spojených převážně s DC nestabilními body (viz oddíl 5.1.4, část Brokawova B-G reference). To vše bychom mohli vyčíst z plochy disipačního potenciálu, kdybychom ji vykreslili jako 3D-graf nad dvěma vybranými obvody proměnnými.

Ke starým problémům s vlastní dynamikou obvodu a s konvergencí výpočtů však zde přistupuje problém, který již nelze překonat žádným technickým opatřením. Je to zásadní problém *existence* disipačního potenciálu nelineárního neresiprocitního systému, který byl rozebrán v oddíle 5.2.2. Je-li totiž transformace mezi virtuálními příčinami a následky nesymetrická, což je znak neresiprocitnosti, pak energie potřebná k překonání vzdálenosti mezi dvěma body stavového prostoru závisí na tvaru dráhy, po které byla vzdálenost překonána. Proto zde není možné definovat disipační potenciál jako funkci stavu žádnou integrální formou.

Přesto je pro okolí každého rovnovážného bodu možno (podle závěrů části 5.2.2) provést transformaci do jiné souřadné soustavy, ve které se obvod bude jevit jako reciprocitní (natočení os a dilatace/kontrakce). Z hlediska této nové soustavy, které bychom mohli označit jako „vnitřní hledisko systému“, tedy bude disipační potenciál existovat a virtuální trajektorie se bude ubírat proti směru jeho gradientu. Skutečnost, že z hlediska vnější globální souřadné soustavy disipační potenciál jako funkci stavu nelze syntetizovat, tedy ještě neznamená, že to není možné v rámci jiných souřadných soustav.

Je otázkou, zda by s tímto „vnitřním hlediskem systému“ mohl souviset okamžitý spotřebovaný výkon. „Technická“ varianta principu nejmenší produkce entropie totiž říká, že proudy a napětí se v obvodu rozloží tak, aby celkový spotřebovaný výkon byl ze všech myslitelných kombinací minimální (lit. [11]). Není problém vykreslit třírozměrný graf vyjadřující závislost okamžitého výkonu na stavu systému. Situace kolem nestabilního bodu band-gap buňky je představena na obr. 5.2.35. V místě nestabilního bodu je vyznačena kulička.



Obr. 5.2.35 Okamžitý výkon jako funkce stavu

Z grafu je vidět, že nestabilní bod je umístěn na křižovatce mnoha možných trajektorií, z nichž pouze jedna nemění energetickou úroveň systému. Díky ní by se kulička teoreticky mohla v místě nestabilního bodu udržet. Působením všudypřítomných fluktuací však zákonitě dojde k pohybu směrem k jednomu nebo druhému stabilnímu bodu.

Z grafu také vyplývá, že přechodu systému do vyšší energetické hladiny brání poměrně strmý potenciálový val, který je nutné překonat. Tomu odpovídají zákmity výstupního napětí buňky pozorované po připojení k napájecímu napětí (viz obr. 5.1.10). Tento val by nebylo nutno překonávat pouze v jedinečném případě, kdy by k přechodu mezi vyšší a nižší energetickou hladinou došlo přímo přes DC nestabilní bod.

6 ZÁVĚR

Zájem vědeckého světa o problematiku stability stejnosměrných obvodů vyvolal v r. 1992 M.M.Green svým článkem [1]. Dnes už mezi klasické práce v tomto oboru dále patří [2] a [5]-[8], přičemž největší nárůst v počtu publikací byl zaznamenán od r. 1998. Tato práce začala postupně vznikat v r. 1994, kdy jsem se setkal s článkem [1]. Od r. 1997 byla podporována grantem 102/98/0782 „Variační metody v teorii obvodů a jejich využití k testování stability“.

Mezi největší přínosy této práce patří stanovení definic stejnosměrného (DC) obvodu a stability, termodynamický přístup k DC obvodu spojený s vyšetřováním tzv. virtuálních trajektorií a odvození tzv. imitačního kritéria stability.

Za nejvýznamnější přínos práce považuji myšlenku, že stejnosměrný obvod je možno studovat jako termodynamický systém (viz části 5.1.5 a 5.2). Důsledky tohoto přístupu jsou dalekosáhlé a zcela změnilo dosavadní způsob testování stability stejnosměrných obvodů. Změna spočívá v poznání, že v obecném dynamickém systému působí kromě klasických regulačních mechanismů, které umíme studovat mj. pomocí dosud známých kritérií stability, ještě mechanismy termodynamické, které se na celkové dynamice spolupodílejí. Tyto termodynamické regulační mechanismy výrazně vystupují do popředí právě v případech, kdy se klasické reaktance z nějakého důvodu neuplatňují, např. při zkoumání velmi pomalých změn kolem pracovního bodu.

Důležitým výsledkem práce je to, že termodynamické chování obvodu lze studovat prostřednictvím tzv. virtuálních trajektorií (části 5.2.1 a 5.2.2). Z fyzikálního hlediska jsou to dráhy, po kterých se likvidují nebo naopak rozvíjejí mikroskopické fluktuace obvodových veličin kolem stabilní nebo nestabilní rovnováhy. Virtuální proto, že u stabilního bodu se z makroskopického hlediska navenek neprojeví, u bodu nestabilního naopak znamenají pouhý počátek procesu vypuzení k nejbližšímu stabilnímu bodu, přičemž další pokračování skutečné trajektorie může být ovlivněno přítomnými reaktančními prvky. Název „virtuální“ byl převzat z dobře známého principu virtuální práce z analytické dynamiky (viz část 4.2.3), protože také stejně jako tento princip popisuje *tendence* systému vychýleného z rovnováhy. Je to zvláště cenné u DC nestabilních systémů modelovaných bez reaktancí, ve kterých by jinak chyběl rozměr času tolik potřebný pro rozvinutí nestability. Pro zjištění termodynamických *tendencí* se ovšem bez času dobře obejdeme.

Konkrétním výsledkem práce je algoritmus pro vykreslování těchto virtuálních trajektorií pro případ obvodu linearizovaného kolem zkoumaného rovnovážného bodu (viz Příloha B). Vychází se z tzv. virtuální matice, která udává relaci mezi fluktuacemi obvodových veličin a následky těchto fluktuací. Tato matice se snadno získá běžnými metodami vycházejícími např. z MMUN.

Dalším originálním přínosem práce je formulace termodynamického kritéria stability (viz části 5.2.2 a 5.2.5). Stabilita vůči konkrétním fluktuacím se zjišťuje na základě polohy vlastních čísel virtuální matice v komplexní rovině. Byl objasněn

fyzikální smysl těchto vlastních čísel jako imitací, do kterých příslušné fluktuace pracují.

Termodynamické kritérium stability bylo ověřeno na mnoha příkladech z praxe (viz část 5.2.6). Bylo použito na linearizované obvody s řízenými zdroji, u kterých se dříve vyskytovaly vážné problémy s analýzou stability. Termodynamickým kritériem byly v konkrétních případech potvrzeny výsledky dosažené metodou M.M.Greena a jiné výsledky byly upřesněny. Unikátní předností metody je možnost učinit si představu o způsobu činnosti termodynamického regulačního mechanismu pomocí tvaru virtuální trajektorie. Díky tomu můžeme klasifikovat rovnovážné body ryze stejnosměrných obvodů jako ohniska, uzly, středy a sedla tak, jak jsme zvyklí u klasických dynamických obvodů.

Dalším původním přínosem práce je objevení vztahu mezi termodynamickou a skutečnou stabilitou obvodu. Bylo dokázáno, že v rámci obvodů s minimální fází je DC stabilita vůči poruše nutnou podmínkou skutečné stability. Naopak byly stanoveny podmínky, za kterých může být DC nestabilní bod stabilizován přidavnými reaktancemi. To vše bylo umožněno odvozením tzv. imitančního kritéria stability (viz část 5.1), které názorně ukazuje, jak se na skutečné stabilitě podílí celé frekvenční spektrum obvodových veličin včetně jejich stejnosměrné složky.

Skutečná stabilita se vyhodnocuje na základě dvou informací: podle frekvenčního průběhu imitance, do které pracuje zdroj fluktuace, v komplexní rovině a podle počtu nulových bodů této imitance s kladnou reálnou částí. Imitanční kritérium stability je velmi výhodné používat ve spojení s počítačovými programy pro analýzu obvodů a dají se tak testovat prakticky jakkoliv složitá zapojení s nelineárními součástkami. Také tato metoda byla úspěšně vyzkoušena na mnoha příkladech z praxe (viz část 5.1.4).

Dalším původním přínosem práce, který navazuje na předchozí výsledky, je metoda umožňující analýzu DC stability linearizovaných obvodů, které obsahují makroobvody typu obecného n -branu (viz část 5.2.7). Využívá se zde myšlenky, že makro přidané do obvodu pouze svazuje původní obvodové veličiny dodatečnými algebraickými podmínkami, které vyplývají z branových rovnic. Úloha vede na hledání vázaného extrému disipační funkce metodou Lagrangeových multiplikátorů, tak jak je to běžné v analytické dynamice. Tyto multiplikátory vystupují v rovnicích jako přidavné proměnné a znamenají proudy a napětí vyměňované mezi makrem a zbytkem obvodu. Důležitým výsledkem je zjištění, že DC nestabilita není nikdy způsobena typem vazby (druhem branových rovnic makroobvodu), nýbrž způsobem realizace této vazby z hlediska reciprocity. Bylo dokázáno, že k nestabilitě vede výhradně nereciprocní realizace zadané podmínky.

Dalším významným výsledkem práce je bližší prozkoumání povahy termodynamické stability. Bylo zjištěno, že mezi termodynamickými a klasickými regulačními principy existuje přísný paralelismus. Projevuje se ve formální podobě virtuálních trajektorií s trajektoriemi klasických dynamických systémů, která zase plyne z formální podobnosti virtuální rovnice s klasickou stavovou rovnicí. V práci jsou publikovány i další podobné znaky a je ukázáno, že termodynamickou stabilitu

Lze definovat na základě chování virtuální trajektorie podobně jako se definuje klasická stabilita podle chování trajektorie skutečné. Navíc se ukazuje, že existuje termodynamická obdoba první i druhé Ljapunovovy věty a že klasické Ljapunovově funkci odpovídá termodynamický disipační potenciál. Těmto otázkám se věnuje část 5.2.8.

Na podnět pracovníků Design Centra v Rožnově p.R. firmy On Semiconductors jsem se také zabýval metodami vizualizace virtuálních trajektorií a disipačního potenciálu. Některá zapojení totiž musí být přivedena do pracovního bodu startovacím obvodem, u jiných je zase nebezpečí, že se dostanou do „nesprávného“ pracovního bodu, ze kterého již není návratu. U většiny stavebních prvků analogových integrovaných obvodů se vyskytují DC nestabilní body a některé z nich nepříznivě ovlivňují celkovou dynamiku zapojení. Plocha disipačního potenciálu zkonstruovaná nad důležitými obvodovými proměnnými nám může dát jasnou představu o všech stabilních i nestabilních bodech a o možných cestách mezi nimi. Této problematice je věnována poslední část práce 5.2.9.

Vzhledem k interdisciplinární povaze této práce bylo potřeba prostudovat značné množství literatury z oblasti analytické dynamiky a termodynamiky nerovnovážných procesů a přizpůsobit ji pohledu technika pracujícího v oblasti teorie elektrických obvodů. Práce zpětně zasáhla i do těchto oblastí a zanechala v nich výsledky, které by mohly být zajímavé pro další bádání. Tak např. obecné kritérium pohybu ve tvaru variačního principu (4.3.1), resp. (4.3.2) uvedené v části 4.4.2, ke kterému jsem dospěl při zkoumání příčinnosti pohybu v elektrických obvodech, má bezpochyby obecnou platnost a v dostupné literatuře se zatím nevyskytuje.

Práce zanechává několik otevřených problémů také v oblasti testování stability elektrických obvodů. Dosud se neřešila otázka úplné soustavy zdrojů odchylek (viz části 5.1.1 a 5.2.3), takže všechny testy zatím vypovídají pouze o stabilitě systému vůči konkrétním poruchám. Imitanční kritérium dokonce řeší stabilitu vůči jediné poruše a práce nedává návod na optimální umístění zdroje poruchy do obvodu. Další výzkum je možno zaměřit na formulaci tohoto kritéria pro obecný počet poruch, což si zřejmě vyžádá zvláštní přístup při zkoumání hodografů pracovních imitancí ve vícerozměrném prostoru.

Výzkumu DC obvodů s algebraickými vazbami jsem se dosud věnoval pouze okrajově (část 5.2.7), ale domnívám se, že tato metoda může mít velké uplatnění při analýze známých zapojení se syntetickými prvky i při syntéze prvků nových. Pomocí řízených zdrojů lze realizovat makroobvod zanášející do odporové sítě jakoukoliv algebraickou podmínku. Je-li proveden reciprocitním způsobem, je teoreticky zajištěna DC stabilita celého obvodu.

Výsledků práce bude využito při vývoji univerzálního proudového konveje, který probíhá na ÚTKO FEI VUT v Brně.

7 LITERATURA

- [1] GREEN,M.M., Wilson, A.N.: How to Identify Unstable dc Operating Points. IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol.39, No.10, October 1992, pp.820-832.
- [2] GREEN,M.M.: (Almost) Half of Any Circuit's Operating Points are Unstable. IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol. 41, No.4, April 1994, pp. 286-293.
- [3] BIOLEK,D.: Comments on „How to Identify Unstable dc Operating Points”. Submitted to IEEE Trans. on Circuit and Systems-I.
- [4] VALSA,J.: Stability of DC Operating Points. Radioengineering, Vol. 6, No. 4, 1997, pp. 21-26.
- [5] JIANG,L.-NISHIO,Y.-USHIDA,A.: Stability of Characteristic Curves of Nonlinear Resistive Circuits. IEEE Trans. on Circuit and Systems, Vol. 45, No.6, June 1998, pp. 634-642.
- [6] OGATA,M.-NISHI,T.: A Topological Criterion for the Instability of Equilibrium Points of a Non-Reciprocal Circuit Containing some VCCSs. 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA'98), Crans-Montana, Switzerland, Sept. 14-17, 1998, pp. 255-258.
- [7] FOX,R.M.: A General Operating-Point Instability Test Based on Feedback Analysis. ISCAS'98 Monterey, CA, USA, 1998.
- [8] OSSOWSKI,M.: Stability Analysis of the Certain Class of Circuits. SPETO'98, Gliwice, Poland, pp.341-344.
- [9] STERN,T.E.: Theory of nonlinear Networks and Systems. An Introduction. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
- [10] LANCZOS,C: The Variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press, Toronto 1962.
- [11] FEYNMAN,R.: Feynmanove prednášky z fyziky 3. Alfa, Bratislava 1988.
- [12] GYARMATI,I: Non-Equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1970.
- [13] BIOLEK,Z: Význam fyzikálních zákonů v teorii řízení. Studijní zpráva, FE VUT Brno, 1983.
- [14] DVORÁK,I., MARŠÍK,F., ANDREJ,L.: Biotermodynamika. Academia, Praha 1982.
- [15] SINICKIJ,L.A.: Metody analitičeskoj mechaniki v teorii električeskich cepej. Lvov 1978.
- [16] KIJONKA,J.-ORSÁG,P.-KŘÍVA,J.: Výklad rovnice fyzikální duality. STO-6, VA Brno, 1997, str. 211-213.
- [17] KUBÍK,S. a kol.: Teorie automatického řízení I. SNTL, Praha 1982.
- [18] BROKAW,A.P.: A Simple Three-Terminal IC Bandgap Reference. IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol.9, No.6, December 1974, pp. 388-393.
- [19] BIOLEK,Z.: Využití variačních metod v analýze elektrických obvodů. STO-5, VA Brno, 1994, s. 92-96.

- [20] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.: Stability Testing of DC Circuits using Variational Methods. XVIII Seminarium, SPETO'95, Gliwice-Ustroń, Poland, Tom 2, pp. 43-48.
- [21] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: Stability Paradox in the Circuits with Controlled Sources. Radioelektronika'96, Brno, 1996, Vol.1, pp.22-25.
- [22] BIOLEK,Z.: Vyšetřování stability lineárních systémů pomocí variačních metod. Vyžádaná přednáška na Kolokviu Teorie obvodů, ÚRE AV ČR Praha, únor 1999.
- [23] BIOLEK,Z.: Stejnoseměrná stabilita analogových obvodů. Vyžádaná přednáška pro vývojové pracovníky MOTOROLA Rožnov p.R., červen 1999.
- [24] BIOLEK,Z.: Příspěvek k teorii stability elektrických obvodů. Závěrečná práce k doplňujícímu pedagogickému studiu absolventů VŠ. Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Olomouc 1998. 44 stran.
- [25] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: The Principle of Minimum Entropy Production for Stability Testing of DC Operating Points. AMTEE'97, Plzeň, pp. 207-212.
- [26] BIOLEK,Z.: Flukтуаční teorie stability elektrických systémů. STO-6, VA Brno, 1997, str. 19-23.
- [27] BIOLEK,Z.: Výkonové hledisko v teorii stability. VII. Sešit katedry teoretické elektrotechniky, s. 8-11. ISBN 80-7078-554-3.VŠB Ostrava 98.
- [28] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.-BIOLKOVÁ,V.: Power Concept of the Stability. Příspěvek do knižní publikace "Recent Advantages in Circuits and Systems", World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1998. Editor N. MASTORAKIS, pp. 31-33. ISBN 981-02-3644 – 1.
- [29] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.: Imittance Stability Criterion. ECCTD99, Italy
- [30] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.: Imittance Stability Criterion. TSP'99 Brno, pp. 64-67, 1999. ISBN 80-214-1154-6.
- [31] BIOLEK,Z.: Imittance Stability Criterion. Konference STO-7, VA Brno, 1999, s. 17-20. ISBN 80-214-1392-1.
- [32] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.-BIOLKOVÁ,V.: Power Concept of the Stability. CSC'98 Piraeus, Greece, Vol. 1, pp. 286-288. ISBN 960-8485-05-3.
- [33] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.-CORRAL,C.: Stable circuits with negative differential resistance. MWSCAS'00, Michigan, USA .
- [34] NYQUIST,H: Regeneration Theory. Bell System Tech. Journal, 11, pp. 126-147, Jan. 1932.
- [35] BIOLEK,Z., BIOLEK,D.: DC stabilita. Studie úvodní etapy projektu. GAČR „Variační metody v teorii obvodů a jejich využití k testování stability“, Brno 1999.
- [36] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.: Stability of DC Operating Points in the Networks with Controlled Sources. SYS'95, AMSE, July 3-5, 1995, Brno, Vol.4, pp. 26-30.
- [37] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: Virtual Trajectories of DC Circuits. CSS'96, Vol. 2, pp. 391-394, Brno, 1996.

- [38] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: Potential Stability of DC Operating Points in the Circuits with Controlled Sources. ICECS'96, Rodos, Greece, Vol. I, pp. 101-104.
- [39] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: Virtual Dynamics of DC Circuits. MWSCAS'96, Ames, Iowa, USA.
- [40] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.-BIOLKOVÁ,V.: New Stability Algorithm for Circuits with Controlled Sources. SSCC'98 Durban, Jižní Afrika, Vol. III, pp. 459 - 462. ISBN 0-620-23136-X
- [41] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: Virtual Dynamics of Resistive Circuits. AMTEE'97, Plzeň, pp. 207-212
- [42] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: The Lambda Stability Criterion For Circuits With Controlled Sources. ECCTD'97 Budapest, Vol. 3, p. late 3
- [43] BIOLEK,D.-BIOLEK,Z.: Stability Of Dc Operating Points And Corresponding Dynamical Systems. AMSE, MS'97, Melbourne, pp. 236-240
- [44] BIOLEK,Z.-BIOLEK,D.-MIŠUREC,J.: Stability Testing of the DC Operating Points. Workshop '97, Praha, Part III., pp. 976-968
- [45] KUBÍK,S., KOTEK,Z., ŠALAMON,M.: Teorie regulace. II. Nelineární regulace. SNTL, Praha 1969.
- [46] FRAZER,R.A., DUNCAN,W.J., COLLAR,A.R.: Základy maticového počtu, jeho aplikace v dynamice a v diferenciálních rovnicích. SNTL, Praha 1958.
- [47] GALPERIN,I.I.: Avtomatika kak odnostrannaja mechanika. Moskva 1964.
- [48] HRUŠÁK,J. a kol.: Některé metody generování Ljapunovových funkcí. Výzkumná zpráva č. 209-14-75, St. výzk. úkol III-1-3/7, Plzeň 1975.
- [49] MYSLÍK,J.: Analýza elektrických obvodů použitím variačních metod. Elektrotechnický obzor, 4/1972.
- [50] NICHOLSON,H.: Reciprocal Relationships in the Linear Optimal-control Problem. Electronic Letters, 7, 18/1971.
- [51] PENTEGOV,I.V., VOLKOV,I.V.: Lagranžian električeskoj cepi s sosredotočennymi parametrami i ego primenenije. Električestvo, 5/1969.
- [52] POLAK,L.S.: Variacionnyje principy mechaniky. Ich razvitije i primenenija v fizike. GIFML, Moskva 1960.
- [53] LATTENBERG,I.: Multifunkční obvody užívající netradiční obvodové prvky pro realizaci filtrů. PhD Thesis. VUT FEI, Brno, 2000. 21str.
- [54] KOUKAL,S.: Laplaceova transformace. Skriptum VUT. Brno, 1979, 104str.
- [55] BIOLEK,Z., BIOLEK,D.: DC Stability of nonlinear Systems. 7th Int. Conference MIXDES2000, Gdynia, Poland, June 2000, pp.127-132.
- [56] BIOLEK,Z., BIOLEK,D.: DC Stability in Circuits with Algebraic Confinements. X. Int. Symp. on Theoretical Electrical Engineering, Sept. 6-9, 1999, Magdeburg, Germany, pp.441-444.
- [57] BRUNE,O.: Synthesis of a Finite Two-Terminal Network Whose Driving-Point Impedance Is a Prescribed Function of Frequency. *J. Math. Phys.*, **10**(3), 1931, pp.191-236.

- [58] LLEVELYN,F.B.: Some Fundamental Properties of Transmission Systems. *Proc. IRE*, **40**, Mar. 1952, pp.271-283.
- [59] RAISBECK,G.: A Definition of Passive Linear Networks in Terms of Time and Energy. *J. Appl. Phys.*, **25**(12), 1954, pp.1510-1514.

PŘÍLOHA A

`%****Program pro vykreslení pole směrových vektorů****`

`x = -2:4:2; y = -2:4:2;`

`[u1,u2] = meshgrid(x,y);`

`g11 = 8; g12 = -1; g21 = -1; g22 = 5;`

`i1=g11*u1+g12*u2;`

`i2=g21*u1+g22*u2;`

`quiver(x,y,-i1,-i2,1);`

`%zadání virtuální matice`

`%výpočet směrových`

`%vektorů`

`%vykreslení směr. vektorů`

PŘÍLOHA B

```
%****Program pro vykreslení virtuální trajektorie****
%*****a směrových vektorů*****

Prec = 100; %nastavení přesnosti
R = 1; %poloměr odchyšky
A11 = .002;A12 = -.001;A21 = -.001;A22 = .001; %zadání virtuální matice
N= 10; %zadání počtu větví

for I=0:N %
    X(1)= R*cos(2*I*pi/N); %počátky větví
    Y(1)= R*sin(2*I*pi/N); %
    for i=1:200
        dX=A11*X(i)+A12*Y(i); %
        dY=A21*X(i)+A22*Y(i); %výpočet trajektorie
        X(i+1)=X(i)-Prec*dX; %
        Y(i+1)=Y(i)-Prec*dY; %
    end
    plot(X,Y,'r'); %kreslení trajektorie
end
hold on;
end
hold on;
x = -1:.1:1; y = -1.5:.1:1.5;
[u1,u2] = meshgrid(x,y);

i1=A11*u1+A12*u2; %
i2=A21*u1+A22*u2; %kreslení směr. vektorů
quiver(u1,u2,-i1,-i2,2); %
xlabel('U2');ylabel('U1')
hold off
```

PŘÍLOHA C

```
%****Program pro vykreslení disipačního potenciálu,***  
%****virtuálních trajektorií a směrových vektorů****
```

```
Prec = 0.01; %přesnost  
R = 1; %poloměr odchyšky  
A11 = 8;A12 = -1;A21 = -1;A22 = 5; %virtuální matice  
A = 10; %počet ramen  
  
x = -1:1:1;y = -1:1:1; %  
[xx,yy]=meshgrid(x,y); %parametry plochy  
zz=A11*xx.^2+A22*yy.^2-(A21+A12)*xx.*yy; %  
surf1(x,y,zz,[0,90]);colormap(pink),shading interp %  
hold on;  
  
for I=0:N %  
    X(1)= R*cos(2*I*pi/N); %  
    Y(1)= R*sin(2*I*pi/N); %  
    for i=1:100  
        dX=A11*X(i)+A12*Y(i); %  
        dY=A21*X(i)+A22*Y(i); %výpočet trajektorií  
        X(i+1)=X(i)-Prec*dX; %  
        Y(i+1)=Y(i)-Prec*dY; %  
    end  
    plot(X,Y,'r'); %vykreslení trajektorií  
    hold on;  
    plot3(X,Y,A11*X.^2+A22*Y.^2-(A21+A12)*X.*Y,'k');%vykreslení plochy  
end  
hold on;  
i1=A11*xx+A12*yy; %  
i2=A21*xx+A22*yy; %vykreslení směrových  
quiver(x,y,-i1,-i2,1); %vektorů  
hold off
```