

PŘÍLOHA (NEJEN) PRO MLADÉ INŽENÝRY SLABOPROUDÝ OBZOR

MEMRISTOR A JEHO MÍSTO V TEORII OBVODŮ

Dalibor Biolek^{1,2}, Zdeněk Biolek³, Viera Biolková⁴

¹*Katedra elektrotechniky; Fakulta vojenských technologií UO Brno, dalibor.biolek@unob.cz*

²*Ústav mikroelektroniky; Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno, biolek@feec.vutbr.cz*

³*SŠIEŘ, Rožnov pod Radhoštěm, zdenek.biolek@roznovskastredni.cz*

⁴*Ústav radioelektroniky; Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, Brno, biolkova@feec.vutbr.cz*

Abstrakt

V květnu 2009 uplynul rok od uveřejnění významného objevu, který v blízké budoucnosti pravděpodobně změní svět informačních technologií. Skupině výzkumníků z laboratoří Hewlett-Packard se podařilo vyrobit experimentální vzorek memristoru, tzv. čtvrté elementární pasivní součástky elektrotechniky, jejíž existence byla předpovězena v r. 1971. Cílem článku je podat vysvětlení toho, co je memristor, jaké jsou jeho předpokládané aplikace, a pokusit se o vymezení jeho místa v současné teorii obvodů. Je rovněž poukázáno na širší souvislosti memristoru s memristivními systémy a s posledními směry výzkumu tzv. memkapacitorů a meminduktorů. Je popsána i metodologie SPICE modelování takovýchto systémů.

Klíčová slova: Memristor, elementární pasivní součástka, analogová paměť.

Abstract

In May 2009, one year elapsed from the announcement of a significant discovery that will probably change the world of information technologies. A group of researchers from Hewlett-Packard laboratories have managed to make an experimental specimen of memristor, the so-called fourth fundamental passive element, whose existence was predicted in 1971. The purpose of this paper is to explain the meaning of memristor, which of its applications we may expect, and to try to specify its position in current circuit theory. Also, links to memristive systems and up-to-date research into the so-called memcapacitors and meminductors are discussed. The methodology of SPICE modeling of such systems is described.

Keywords: Memristor, fundamental passive element, analog memory.

1 Úvod

Klasické články Leona Chua z let 1971 [1] a 1976 [2], v nichž definuje memristor jako čtvrtou fundamentální pasivní součástku elektrotechniky a memristivní systém jako zobecnění memristoru, byly až do loňského roku na okraji zájmu odborné veřejnosti. Situace se dramaticky změnila v květnu 2008, kdy tým výzkumníků z laboratoří Hewlett-Packard (HP) publikoval v časopise Nature článek, v němž referoval o objevu memristoru jako pasivní součástce v pevné fázi [3]. Objevu bylo dosaženo díky pokrokům v nanotechnologiích, neboť se ukazuje, že memristivní chování je přirozeným jevem ve světě nanometrických rozměrů.

Od objevu v květnu 2008 se do výzkumu, spojeného s memristorem, investuje ve firmě HP čím dál více prostředků, zejména v souvislosti s očekávanou revolucí na trhu s paměťovými médii, kdy memristor, pracující jako spínač [4] ve funkci paměti RRAM (Resistive Random-Access Memory) by měl podle prognóz vytlačit současné flash paměti [5]. Intenzivně se zkoumají i ryze analogové aplikace memristoru, a to s ohledem na realizace vysokokapacitních analogových pamětí, předurčených k simulaci chování mozkových buněk a v důsledku toho akcelerují práce v oblasti umělé inteligence [3], [6]. Úměrně tomu zaznamenáváme prudký nárůst publikací o memristoru. Kromě zpráv o konkrétních technických řešeních [5], [6], [7] aj. vychází mnoho prací, zaměřených na základní výzkum. Vývoj je tak rychlý, že mnozí autoři nečekají, až jejich práce projde zdoluhavou procedurou, spojenou s oponenturou v impaktovaných časopisech, a publikují přímo na internetu buď formou e-printů

[8]-[11] nebo blogů [12]. Významným počinem University of California, Berkeley bylo zveřejnění kompletního videozáznamu mezinárodního sympozia o memristoru a memristivních systémech [13] z listopadu 2008 na Internetu.

Historie memristoru (**Memory Resistor**) oficiálně začíná dnem 5. září 1971, kdy Leon O. Chua publikuje článek [1] s názvem „Memristor – the missing circuit element“. Autor v něm vyvozuje, že v zájmu zachování symetrie vztahů mezi čtveřicí základních elektrických veličin, jimiž jsou napětí u , proud i , náboj q a magnetický tok φ , by měl kromě rezistoru (R), kapacitoru (C) a induktoru (L) existovat ještě čtvrtý základní pasivní prvek, který dosud unikal pozornosti – memristor (M).

Původní článek [1] obsahuje detailní odvození charakteristických vlastností této nové součástky, mezi nimiž vyniká její schopnost „pamatovat si“ celkové množství elektrického náboje, který jí prošel. V praktické rovině by to znamenalo, že odpor memristoru lze jednoduše zvyšovat a snižovat proudem, který do něj teče po určitou dobu jedním nebo druhým směrem. Pokud dodávku proudu přerušíme např. vypnutím napájecího napětí, poslední hodnota odporu bude v součástce „zapamatována“ po teoreticky libovolnou dobu.

Takový elektrický prvek by se choval jako perfektní analogová paměť s širokým aplikačním potenciálem. Dal by se využít také ve výpočetní technice jako jednobitová nebo i víceúrovňová energeticky nezávislá přepisovatelná paměť.

Zatímco pasivní součástky typu R , L nebo C lze principiálně snadno vyrobit, pátrání po fyzikálním principu, který by umožnil realizaci memristoru jako pasivní elektrické součástky, bylo dlouho neúspěšné. Již v roce 1972 však Oster

a Auslander popisují v článku [14] mechanické, hydraulické a chemické systémy, jejichž pohybové rovnice se formálně shodují s rovnicemi, odvozenými pro elektrický memristor. Počátkem 70. let minulého století si někteří badatelé začali uvědomovat, že mnohé jevy, s nimiž se v rámci svých specializací běžně setkávají, vykazují znaky memristoru. Tento proces završil opět Leon Chua, když v roce 1976 publikoval s Sung Mo Kangem článek [2] s názvem „Memristive devices and systems“. V něm definuje třídu tzv. memristivních systémů jako dynamických systémů s paměťovým chováním, které zahrnují memristor jako speciální případ. Práce [2] umožnila identifikovat a jednotným způsobem popsat systémy nejrůznější fyzikální povahy, u nichž byla pozorována obtížně vysvětlitelná hystereze. Ukazuje se, že z matematického hlediska není principiální rozdíl např. mezi žárovkou, automobilovým tlumičem a nervovou synapsí, protože jejich paměťové chování se dá popsat formálně stejnými rovnicemi.

Ačkoli se dlouho vědělo o tom, že mnohé běžné jevy vykazují memristivní znaky, nemělo to na další směr vědeckého bádání prakticky žádný vliv. Situace se změnila až v květnu 2008, kdy v časopise Nature vyšel článek [3] „The missing memristor found“. Tým z laboratoří Hewlett Packard v kalifornském Palo Altu vedený S. Williamsem tím oficiálně oznámil, že memristor předpověděný v r. 1971 se podařilo vyrobit jako polovodičovou součástku. Příběh o tom, jak k objevu došlo, vypráví S. Williams v [15].

Na druhou stranu je však třeba poznamenat, že již v 80. letech minulého století napsal Leon Chua několik dalších zásadních článků, v nichž vybudoval nový ucelený systém axiomaticky definovaných prvků vyšších řádů. Jedním z těchto prvků je i memristor. V roce 2003, tedy pět let před objevem v laboratořích HP, vyšel v IEEE Proceedings jeho vynikající článek [16], inspirovaný některými objevy a otevřenými problémy ze světa nanotechnologií. Je docela pravděpodobné, že kdyby vývojoví pracovníci firmy HP byli s těmito pracemi podrobněji obeznámeni, došlo by k vývoji memristoru v pevné fázi dříve.

Článek popisuje memristor jako obvodový prvek a zabývá se jeho vlastnostmi. Za pomoci návratů k prakticky zapomenutým pracem prof. Chuy je analyzováno místo memristoru a dalších součástek, které jsou v současnosti „znovuobjevovány“ na základě pokroků v nanotechnologiích, v současné teorii obvodů.

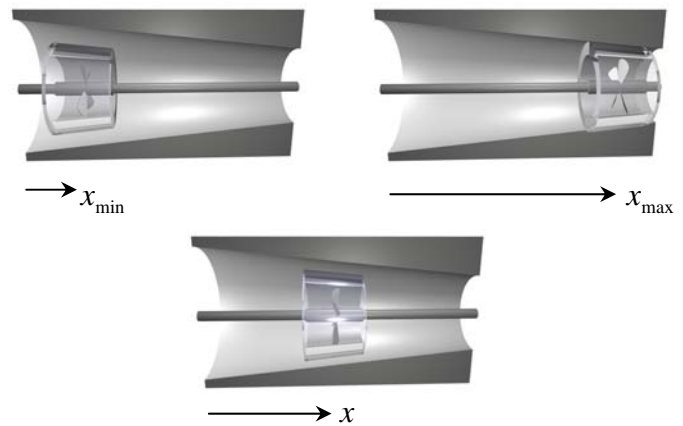
2 Objev v laboratořích HP aneb co je memristor

Memristor je v podstatě rezistor, jehož odpor lze zvyšovat nebo snižovat pomocí proudu, který jím necháme protékat po určitou dobu jedním nebo druhým směrem. Přerušíme-li průtok proudu, stav memristoru, a tedy i velikost jeho odporu, jsou v součástce uchovány.

To, jak memristor funguje, je patrné z hydromechanické analogie podle **obr. 1** [17]. Trubička, kterou protéká tekutina, odpovídá memristoru, kterým protéká elektrický proud. Proud tekutiny točí vrtulkou, která pohybuje zátkou podle směru průtoku na jednu nebo druhou stranu. Pohybem zátky se mění aktivní průřez a tím také odpor, který trubička klade protékající tekutině. Přestane-li tekutina proudit, pohyb

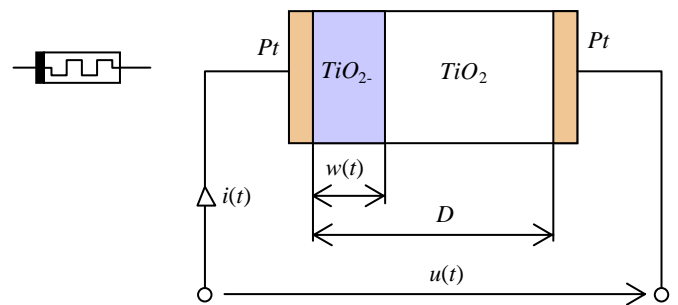
se zastaví a trubička si pamatuje svůj stav (a tím také odpor) tak dlouho, dokud tekutina opět nezačne proudit a pohybovat zátkou.

Vrtulka si tedy svou okamžitou polohou x pamatuje celkový objem q tekutiny, který skrze ni v minulosti prošel, a podle toho spojitě řídí odpor R celé soustavy, tj. $R = R(q)$. Ve stavu, znázorněném v levé části **obr. 1**, proud prochází nejen přes vrtulku, ale i kolem zátky a odpor soustavy má minimální velikost R_{on} . Největší odpor R_{off} má trubička v opačném stavu, kdy je zátkou uzavřena a proud prochází pouze otvorem pro vrtulku. Pohybuje-li se zátká vlivem proudění tekutiny střídavě na obě strany tak, že se stále udržuje uvnitř trubičky (viz spodní část **obr. 1**), chová se celá soustava jako ideální memristor, tj. jako rezistor spojitě měnící hodnotu odporu podle množství protékajícího proudu.



Obr. 1. Hydromechanický model memristoru. Vrtulka je vedena tyčí s vyřezaným závitem. Je hnána proudem tekutiny a pohybuje se mezi krajními polohami x_{min} a x_{max} . (autor: P. Mich).

Struktura součástky z laboratoří HP je na **obr. 2** [3].

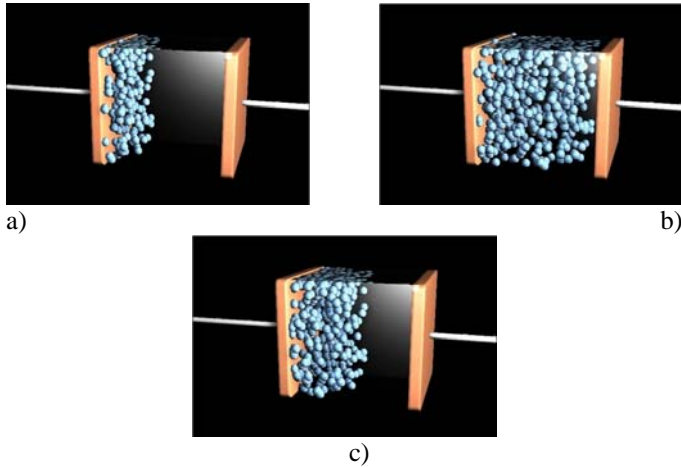


Obr. 2. Polovodičový memristor z laboratoří HP.

HP memristor je nanosoučástka, tvořená tenkou vrstvou kysličníku titaničitěho TiO_2 tloušťky $D \approx (10-30)$ nm, uzavřenou mezi dvě platínové elektrody. Samotný TiO_2 je dobrým izolantem. U jedné z elektrod je však ochuzen o atomy kyslíku, čímž vzniká vrstvička dopantů - kladně nabitých děr (na **obr. 2** označena jako TiO_{2-}), chovající se jako polovodič s poměrně dobrou vodivostí. Celkový odpor mezi elektrodami je dán součtem odporů polovodičové a izolační vrstvičky.

Vlivem protékajícího proudu se hranice mezi vodivou a nevodivou vrstvou pohybuje ve směru proudu, šířka vodivé vrstvy w se mění a celý memristor mění svůj odpor (viz **obr. 3**). Ve stavu a) je odpor maximální R_{off} , ve stavu b)

je minimální R_{on} . Rozhraním mezi vodivou a nevodivou oblastí lze pohybovat na jednu nebo druhou stranu proudem, protékajícím jedním nebo druhým směrem. Odpojí-li se memristor od vnějšího napětí, proud přestane protékat, rozhraní se zastaví a už svoji polohu nezmění, tj. součástka si pamatuje svůj odpor teoreticky libovolně dlouho.



Obr. 3. Pohyb dopantů uvnitř memristoru HP.

Porovnáním hydromechanického a polovodičového memristoru na obr. 1 a 3 zjišťujeme tyto analogie:

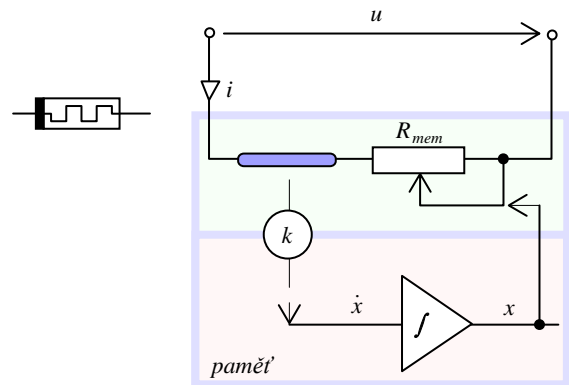
Tab. 1. Hydromechanicko-elektrické analogie.

memristor	
hydromechanický	polovodičový
Tlakový spád na trubičce p [Pa]	Napětí mezi vývody memristoru u [V]
Rychlost průtoku tekutiny v [m^3/s]	Elektrický proud i [A]
Rychlost zátky V [m/s]	Rychlost rozhraní V [m/s]
Objem tekutiny q , která prošla trubičkou [m^3]	Elektrický náboj q , který prošel memristorem [C]
Poloha zátky x [m]	Poloha rozhraní w [m]
Odpor trubičky R [$Pa \cdot s \cdot m^{-3}$]	Odpor memristoru R [Ω]

Posloupnost jednotlivých řádků tabulky ukazuje na řetězec událostí, jejichž konečným výsledkem je paměťový efekt. Tlaková nebo napěťová příčina uvede do pohybu tekutinu nebo elektrický náboj. Vrtulka v zátce nebo polovodičové rozhraní provádí integraci těchto pohybových změn v čase, přičemž výsledkem je poloha. Paměťový efekt tedy spočívá v zapamatování poslední polohy – ať už jde o polohu zátky nebo rozhraní mezi vrstvami. Od této polohy je odvozena aktuální velikost odporu memristoru.

Na obr. 4 je tento paměťový princip znázorněn ve formě strukturního schématu. Memristor se chová vůči okolí jako rezistivní port, řízený stavem x (poloha rozhraní, zátka) a doplněný pamětí pro zapamatování tohoto stavu. Paměť je tvořena mechanismem (např. vrtulka na závitě), který provádí integraci rychlosti dx/dt (rychlost proudu tekutiny, rychlost rozhraní) v čase. Tato rychlost je přímo úměrná protékajícímu proudu, konstantou úměrnosti je k (stoupání závitě, migrační rychlost nosičů náboje). Podle směru neboli znaménka protékajícího proudu se souřadnice x zvětšuje nebo zmenšuje a mění hodnotu odporu tam a zpět. Po odpojení memristoru

od vnějšího buzení se zapamatuje poslední stav a tím i poslední hodnota odporu.



Obr. 4. Princip paměťového efektu memristoru.

Z výše popsaného paměťového efektu vyplývá, proč je memristor atraktivní pro takovou komerční firmu, jakou je Hewlett-Packard. Pokud by se potvrdila extrémní dlouhodobost paměťového efektu, pak takovýto elektrický prvek by se choval jako 1 – bitová, snadno adresovatelná nevolativní přepisovatelná paměť, využívaná v hraničních stavech typu R_{on} a R_{off} , a současně jako analogová paměť se spojitou škálou stavů. Energie je třeba pouze k zápisu a čtení, nikoliv k uchování informace. S přihlédnutím k tomu, že jde o nanosoučástku, odhadovaná hustota záznamu několiknásobně převyšuje parametry současných pamětí typu flash.

Schéma na obr. 4 dává přímý návod k sestavení rovnic, popisujících paměť memristoru i jeho rezistivní port. Pro jednoduchost zvolme za stav x poměr $x=w/D$ (viz obr. 2); vzhledem k výše popsané funkci se bude bezrozměrné číslo x měnit v pásmu mezi 0 a 1. Pak

$$\frac{dx}{dt} = ki(t) \quad (1)$$

je stavová rovnice pro popis memristorové paměti a

$$u(t) = R_{mem}(x)i(t) \quad (2)$$

je rovnice, popisující rezistivní port.

$$R_{mem}(x) = xR_{on} + (1-x)R_{off} = R_{off} - x\Delta R, \quad \Delta R = R_{off} - R_{on} \quad (3)$$

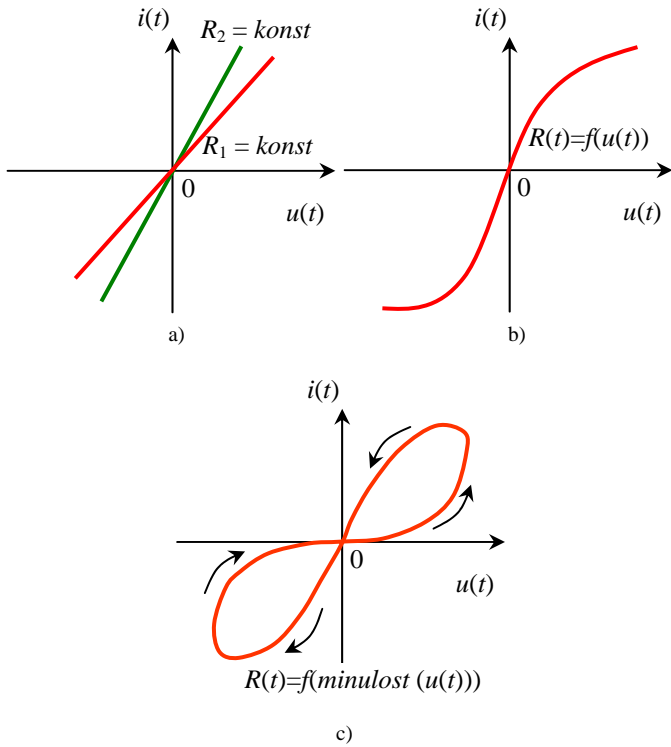
je odpor memristoru, nastavitelný v mezích $R_{mem}(0) = R_{off}$ až $R_{mem}(1) = R_{on}$.

Tyto rovnice mohou být východiskem pro modelování memristorů nejrůznější povahy a pro počítačovou simulaci chování memristoru pomocí nejrůznějších simulačních programů, např. Matlabu, SPICE, apod. Podrobněji se této problematice věnujeme v kapitole 6.

3 Charakteristické vlastnosti memristoru

To, že memristor není obyčejná součástka, poznáme již v okamžiku, kdy se pokusíme určit jeho statickou

ampérvoltovou charakteristiku. Z výše uvedeného totiž vyplývá, že po připojení memristoru k jakémukoliv nenulovému napětí uvedeme do pohybu rozhraní mezi vodivou a nevodivou vrstvou, což povede k tomu, že se memristor po nějaké době dostane (podle polaritě přiloženého napětí) do jednoho ze svých krajních stavů. Statickou ampérvoltovou charakteristiku tedy nezměříme vůbec, smysl však mají charakteristiky, získané buzením memristoru definovaným periodickým signálem, který by pohyboval vnitřním rozhraním tam a zpět na obě strany. Situaci při buzení lineárního rezistoru, nelineárního rezistoru a memristoru harmonickým napětím s nulovou střední hodnotou představuje **obr. 5**.



Obr. 5. Ampérvoltové charakteristiky a) lineárního rezistoru, b) nelineárního rezistoru a c) memristoru.

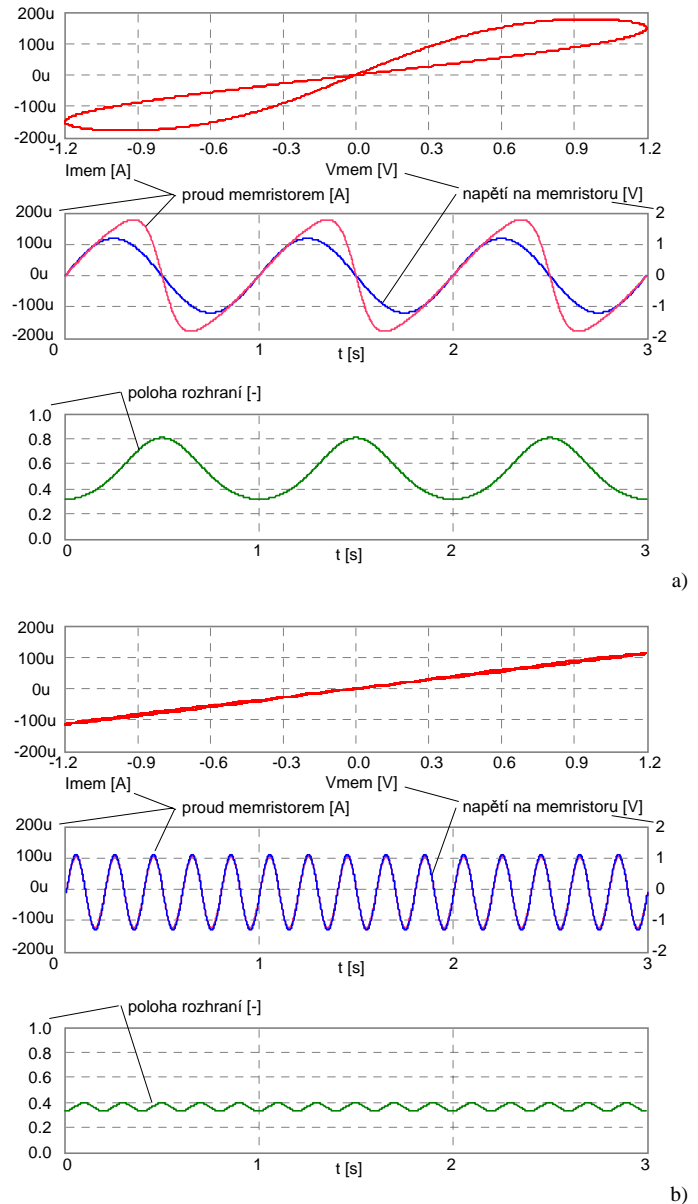
Memristor je stejně jako obyčejný rezistor pasivní součástka, proto musí jeho ampérvoltová charakteristika procházet počátkem souřadnic a celá leží v 1. a 3. kvadrantu.

Ampérvoltové charakteristiky lineárního rezistoru jsou na **obr. 5 a)**. Směrnice charakteristiky udává okamžitou vodivost, která zůstává konstantní, jedná se proto o přímky. **Obr. 5 b)** ukazuje, že okamžitý odpor nelineárního rezistoru závisí na okamžité hodnotě napětí (proudu), proto je strmost charakteristiky závislá na poloze pracovního bodu. U memristoru podle **obr. 5 c)** je okamžitý odpor závislý nejen na okamžitém stavu systému, ale i na celé historii, která k tomuto stavu vedla. Protože stav memristoru je dán celkovým množstvím náboje, který jím prošel, má v rámci jedné periody každý stav unikátní historii a tím i unikátní směrnici pro další směr pohybu. Proto se také musí memristor vracet do počátku souřadné soustavy jinou cestou, než jakou z něho vyšel. Z toho důvodu má ampérvoltová charakteristika memristoru obecně tvar smyčky.

Takováto hysterezní smyčka je typickým znakem memristivního chování, které popsal ve své originální práci [1] prof. Leon Chua. Díky tomuto poznávacímu znamení

(„Fingerprint“) pochopili v laboratořích Hewlett Packard, že to, co se podařilo vyrobit, je skutečně memristor [15].

Při zvýšení kmitočtu sinusového budícího napětí urazí vnitřní rozhraní memristoru za kratší periodu kratší časový úsek. Rozdíl mezi maximální a minimální velikostí odporu memristoru proto klesá, klesá i rozkmit proudu, tekoucího memristorem. Hysterezní smyčka proto mění svůj tvar tak, že pro vysoké kmitočty přechází v úsečku. Směrnice této úsečky je dána vodivostí, která odpovídá střední hodnotě polohy x , kolem které rozhraní kmitá. Na vysokých kmitočtech se tedy memristor chová jako obyčejný rezistor.



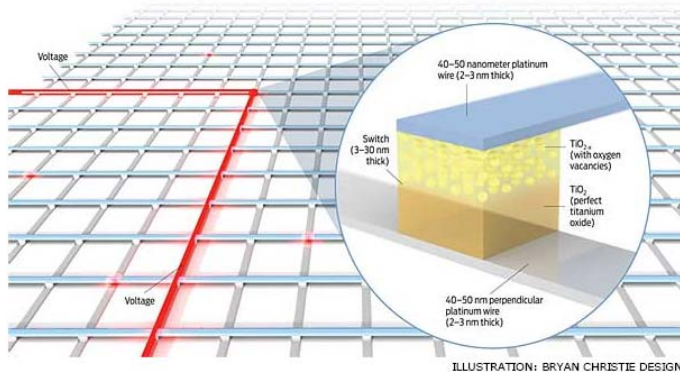
Obr. 6. Charakteristiky memristoru, buzeného zdrojem harmonického napětí o kmitočtu a) 1 Hz, b) 5 Hz.

Tyto obecné závěry jsou potvrzovány výsledky simulace na **obr. 6**. Memristor je buzen sinusovým napětím o amplitudě 1V při frekvenci 1Hz a 5 Hz. Tři sekce v každém grafu obsahují v pořadí zdola nahoru tyto časové průběhy: poloha rozhraní x , napětí a proud memristorem, hysterezní smyčka ampérvoltové charakteristiky. Z daných průběhů je jasně patrná ztráta memristivních vlastností při růstu frekvence.

Výsledky počítačových simulací, prezentované v tomto článku, byly získány v programu Micro-Cap s využitím nového SPICE modelu memristoru, který je popsán v části 6.

3 Memristor jako paměť

Podle obsahu příspěvků na semináři [13] a zdroje [15] je budoucnost memristoru spojována s tzv. příčkovou strukturou (crossbar structure), ve které jsou jednotlivé paměťové elementy zapojeny do matice podle **obr. 7**.



Obr. 7. Memristorová matice zapojená do příčkové struktury (zdroj obrázku - [15]).

Příčková struktura je tvořena rastrem vzájemně se křížících vodičů. V místě každého křížení jsou vodorovné a svislé vodiče od sebe vzájemně odděleny memristorem. Jelikož memristor je energeticky nezávislá paměť, v klidovém stavu nespotebovává paměťová matice žádný proud.

Adresování paměťové buňky pro čtení nebo zápis se provede velmi snadno aktivací příslušné dvojice vodičů x a y .

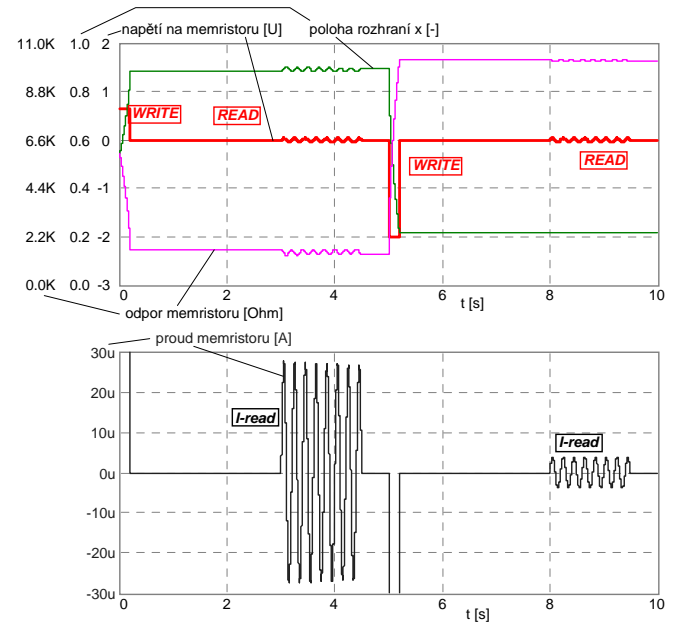
Zápisem do analogové memristorové buňky rozumíme změnu odporu memristoru na jakoukoliv hodnotu v rozmezí od R_{on} do R_{off} . Odpor memristoru lze spojitě měnit množstvím dodaného náboje, což lze v praxi uskutečnit působením zdroje napětí nebo proudu po určitý čas.

Čtením analogové memristorové buňky rozumíme zjištění aktuální hodnoty odporu memristoru. Technicky to lze zajistit změřením proudu (nebo napětí) při aplikaci definovaného napětí (nebo proudu). Problém je, že každé takové měření má zpětně za následek změnu odporu, neboť průchodem sebemenšího proudu se uvádí do pohybu vnitřní rozhraní mezi vodivou a nevodivou vrstvou memristoru. Východiskem z tohoto dilematu by mohlo být čtení buňky pomocí dokonale symetrického sinusového signálu malé amplitudy, jak ukazuje počítačová simulace na **obr. 8**.

Zápis do buňky se provádí napěťovým impulzem, který dodá náboj potřebný pro změnu odporu memristoru. V naší ukázce je šířka impulzu konstantní, podle potřeby se mění amplituda a polarita impulzu. Z **obr. 8** je patrné, že první zápisový impulz zvětší šířku dotované vrstvičky (nastavení stavu x na vyšší hodnotu) a tím sníží odpor memristoru, druhý zápisový impulz opačné polaritavy zvýší hodnotu odporu na jinou hodnotu. Po ukončení každého zápisového impulzu si memristor hodnotu odporu zapamatuje, ta se přečte v následujícím čtecím cyklu. Čtení se realizuje aplikací harmonického napětí malé amplitudy, snímá se velikost

amplitudy proudu. Z výsledků simulace je patrné, že malé čtecí napětí pouze rozkmitá vnitřní rozhraní mezi vodivou a nevodivou vrstvou kolem její aktuální hodnoty. Pokud se zajistí nulová střední hodnota celého čtecího signálu, nedojde vlivem čtecího cyklu k ovlivnění měřeného stavu.

Z této ukázky je zřejmé, že nasazení memristoru do technických aplikací si vyžádá vývoj nových metod *analogové* techniky, i když půjde o aplikace v technice *číslicové*.



Obr. 8. Zápis (WRITE) a čtení (READ) stavu memristoru.

4 Memristor jako speciální případ memristivního systému

Součástka z laboratoří HP se ve skutečnosti nechová jako ideální memristor, protože její odpor nemůže vybočit z intervalu (R_{on} , R_{off}). Jakmile rozhraní mezi vodivou a nevodivou vrstvou dorazí vlivem protékajícího proudu k jednomu z okrajů memristoru, stav x se již dále nemůže měnit, i kdyby proud protékal dál. Na okrajích memristoru tak přestává platit, že jeho odpor je přímo úměrný množství náboje, který jím prošel. Jinak řečeno, memristor na svých okrajích „ztrácí paměť“, neboť veškerý náboj, který jím protekl a přesto nijak nezměnil jeho stav, je vlastně zapomenut.

Pasivních systémů, které si pamatují množství proteklé substance pouze v omezené míře, je kolem nás celá řada. Všechny se poznají podle hysterezního chování, které ukazují na jistý druh paměti. Snadno pochopitelným příkladem může být chování žárovky.

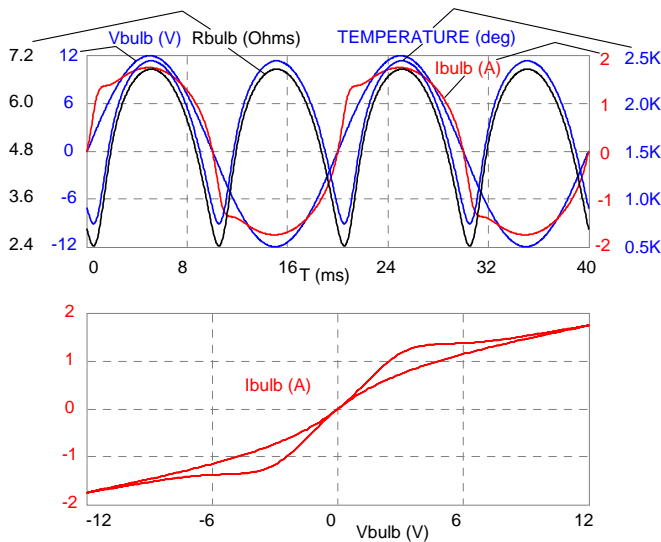
Odpor žárovky je dán teplotou vlákna, která do jisté míry závisí na celkovém množství proudu, který jím protekl. K aktuální teplotě vlákna totiž nepřispívá pouze aktuální velikost proudu, ale s určitou vahou přispívá i všechen proud, který tekl vlákem v minulosti. Právě tato skutečnost činí z žárovky paměťový prvek s hysterezní ampérvoltovou charakteristikou.

Obr. 9 představuje výsledky počítačové simulace chování žárovky 12V/21W, napájené ze zdroje sinusového napětí 12V/50Hz. Stavovou veličinou x , od které se vše odvíjí, je teplota vlákna. Počítačový model vychází z toho, že rychlost růstu teploty vlákna (dx/dt) je přímo úměrná dodávanému příkonu, sníženému o ztráty, vzniklé vyzářováním do okolí. Tyto ztráty způsobují ochlazování žárovky a jsou úměrné čtvrté mocnině teploty vlákna. Stavová rovnice žárovky a rovnice jejího rezistivního portu pak budou mít tvar

$$\frac{dx}{dt} = f(x, i), \tag{4}$$

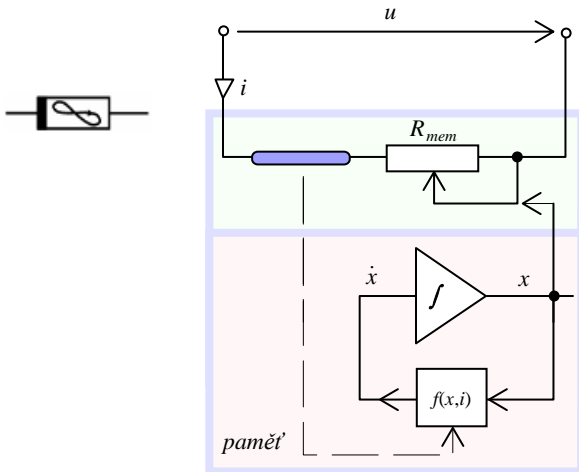
$$u(t) = R(x, i)i(t), \tag{5}$$

kde $f(x, i) = (a + bx)i^2 - cx^4$, a , b a c jsou materiálové konstanty a $R(x, i)$ je funkce, popisující teplotní závislost obecně nelineárního odporu vlákna žárovky.



Obr. 9. Simulace hysterezního chování žárovky 12V/21W.

Rovnice (4) a (5) jsou zobecněním rovnic (1) a (2) a popisují obecný memristivní systém, který byl poprvé pojmenován a popsán v [2]. Jeho struktura přímo vyplývá z výše uvedených rovnic a je představena na **obr. 10**.



Obr. 10. Schéma obecného memristivního systému.

Ze schématu na **obr. 10** je patrné, že memristivní systém je opět rezistor doplněný pamětí. Na rozdíl od memristoru však paměť může mít nyní mnohem variabilnější podobu. Stavová rovnice (4), popisující tuto paměť, je totiž rovnicí zcela obecného nelineárního dynamického systému, kde stavem x může být celý vektor vnitřních proměnných.

Takto pojatý memristivní systém nemusí být ani elektrické povahy, neboť stavovým vektorem i portovými proměnnými u , i mohou být jakékoli fyzikální veličiny. Díky tomu jsme schopni rozpoznat známky jakéhokoliv paměťového chování v široké škále systémů nejružnější fyzikální povahy, a to dokonce bez ohledu na to, zda se jedná o živé organizmy nebo stroje (viz např. popis memristivního chování améby v [10]).

Memristivní systémy je možno nalézt doslova na každém kroku. Z výše uvedeného příkladu žárovky plyne, že dokonce každý vodič, kterým protéká proud, je memristivním systémem. V práci [2] jsou jako zástupci těchto systémů jmenovány termistor, výbojkové trubice a iontový systém nervové buňky.

Z porovnání strukturálních schémat na **obr. 4** a **obr. 10** vyplývá, že memristor je pouze speciálním případem memristivního systému. Absence zpětné vazby u paměťového integrátoru způsobuje, že memristor má „dokonalou paměť“. Právě takový pasivní a navíc energeticky nezávislý prvek se velmi dobře hodí k trvalému uchování informace v technických zařízeních.

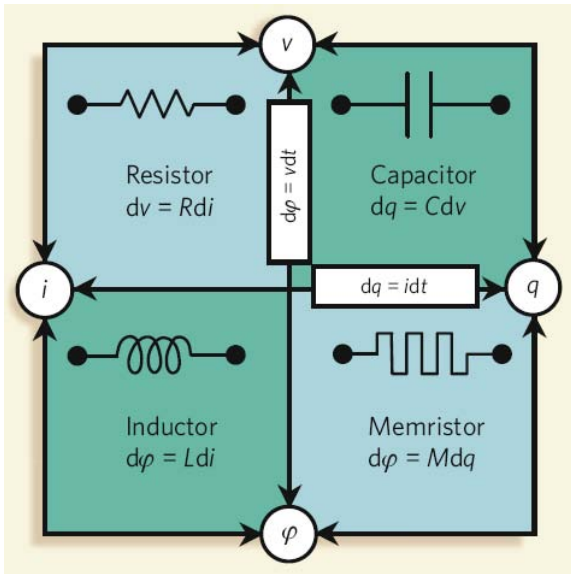
4 Memristor jako čtvrtý základní pasivní prvek elektrotechniky

Ve slavném článku [1] předpovídá Leon Chua existenci memristoru na základě tzv. čtvercové symetrie. **Obr. 11**, který je v této souvislosti často uváděn, je převzat z [18]. Ze čtveřice elektrických veličin u , i , q a ϕ je možné vytvořit celkem 6 dvojic, konkrétně $u-i$, $q-u$, $\phi-i$, $\phi-q$, $\phi-u$ a $q-i$. Vztahy mezi posledně jmenovanými dvojicemi $\phi-u$ a $q-i$ jsou dány časovými derivacemi, resp. integrály. Vztah mezi napětím a proudem, nábojem a napětím, tokem a proudem je definován ampérvoltovou charakteristikou rezistoru, coulomb-voltovou charakteristikou kapacitoru a weber-ampérovou charakteristikou induktoru. Diferenciálními veličinami, které lze z těchto charakteristik odvodit, jsou resistance (odpor), kapacita a indukčnost. Poslední dvojice $\phi-q$ podle Chuovy hypotézy v [1] signalizuje, že by mohla existovat čtvrtá pasivní součástka, tzv. memristor, s příslušnou diferenciální veličinou – memristancí, definovanou jako poměr $d\phi/dq$. Rozměrová zkouška ukazuje, že jednotkou memristance je Ohm.

V základní práci [1] Chua rovněž ukazuje, že tak jako žádnou z trojice pasivních součástek R , L , C nelze plně syntetizovat pouze kombinací zbylých dvou pasivních součástek, není možné realizovat ani memristor pouze pomocí pasivních součástek R , L a C . Z tohoto pohledu je tedy memristor rovněž fundamentálním pasivním prvkem.

Je známo, že např. syntetický induktor lze vyrobit na základě prvků R , C a aktivní součástky, např. operačního zesilovače. Podobně Chua v práci [1] popisuje, jak je možné realizovat syntetický memristor na bázi známých pasivních prvků a mutátorů. V závěru však Chua vyjadřuje naději, že v budoucnu se snad podaří memristor vyrobit jako pasivní

součástku. K tomu došlo až po 37 letech objemem v laboratořích HP.



Obr. 11. Úplný kvartet základních pasivních součástek elektrotechniky podle [18].

Prozatím se nám memristor může jevit jen jako pouhý rezistor se specifickou závislostí odporu na prošlém náboji. Uvidíme však, že „podivné“ chování, zastoupené hysterezními závislostmi, je způsobeno výběrem veličin, prostřednictvím kterých jsme navyklí zkoumat jevy v elektrických obvodech. Přejdem od napětí u a proudu i k jiné dvojici veličin přejdeme do jiné souřadné soustavy, která nám umožní odhalit skutečně fundamentální principy memristoru.

Souřadnice každého bodu hysterezní křivky $c)$ na obr. 5 jsou mezi sebou vázány vztahem Ohmova zákona $u(t)=R(q)i(t)$. Pokusme se zjednodušit tuto rovnici tím, že ji vyjádříme co možná nejmenším počtem fyzikálních veličin. Uvážíme-li, že proud vyjadřuje rychlost změny náboje $i=dq/dt$, vyjde nám po elementární úpravě $u(t)dt=R(q)dq$. Výraz na levé straně je diferenciálem veličiny

$$\varphi(t) = \int u(t)dt. \quad (6)$$

Po další elementární úpravě vyjde diferenciální podoba Ohmova zákona pro memristor

$$R(q) = \frac{d\varphi}{dq}. \quad (7)$$

Veličina φ daná výrazem (6) je časovým integrálem napětí a v elektrotechnice má rozměr magnetického toku. Její jednotkou je 1 Weber. V kontextu konkrétní aplikace nemusí vyjadřovat tok skutečného magnetického pole a tehdy se označuje pouze jako tok (flux). Tok je elektrickou obdobou mechanické hybnosti (nebo také impulzu síly), což je jedna ze stěžejních veličin teoretické mechaniky.

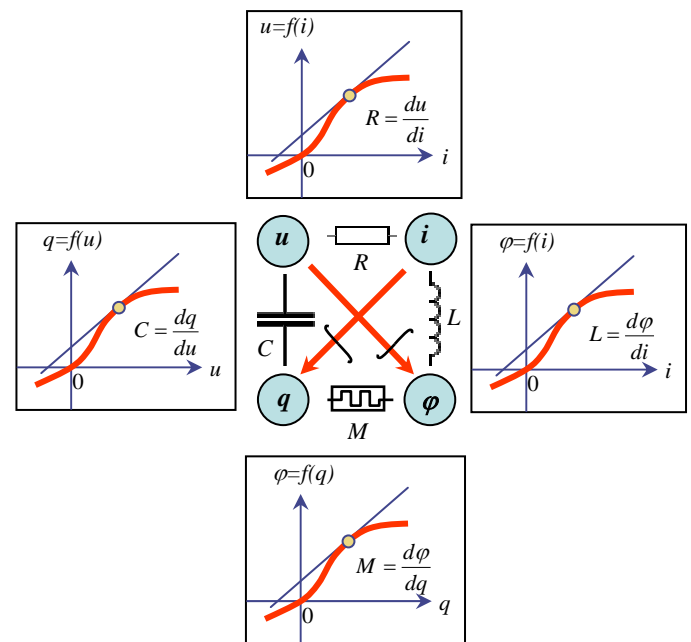
Rovnice (7) tedy říká, že okamžitý (dynamický) odpor memristoru zkoumaného pomocí toku φ a náboje q je roven strmosti křivky, vyjadřující závislost

$$\varphi = f(q). \quad (8)$$

Memristor je tedy součástkou, která vytváří přímou vazbu mezi tokem a nábojem. Zásadní význam, který má tato skutečnost pro teoretickou elektrotechniku, je patrný z obr. 12, který je rozšířením známého obr. 11.

Ke každé pasivní součástce je na obr. 12 zakreslen graf takzvané **konstituční relace**. Například pro kapacitor je konstituční relací vztah mezi elektrickým nábojem a elektrickým napětím a grafem je coulomb-voltová charakteristika. Pro nelineární stacionární kapacitor je tato konstituční relace jednoznačnou funkcí, z níž lze odvodit diferenciální i statickou kapacitu v konkrétním pracovním bodě. Podobně pro memristor je konstituční relací weber-coulombová charakteristika, která je jednoznačnou funkcí navzdory tomu, že ampérvoltová charakteristika memristoru je nejednoznačná, vykazující hysterezi. Navíc míra hysterezních efektů závisí na způsobu buzení memristoru, tedy na způsobu jeho začlenění do okolí. Z uvedeného vyplývá důležitost volby souřadné soustavy pro popis memristoru:

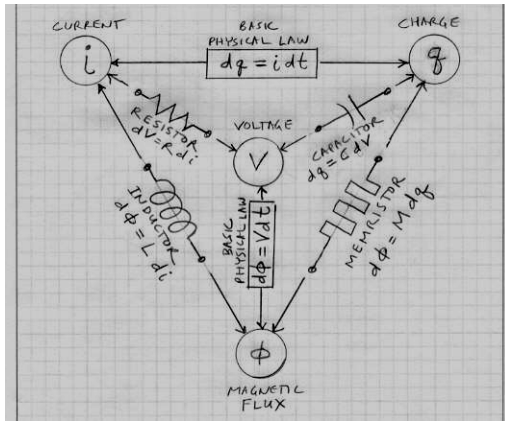
Z nejednoznačné ampérvoltové charakteristiky snadno přejdeme na jednoznačnou charakteristiku – konstituční relaci – pokud na osy vynášíme ne napětí a proud, ale jejich časové integrály.



Obr. 12. Konstituční relace pasivních součástek.

Pro úplnost dodejme, že čtvercové schéma na obr. 11, resp. 12 není jediným schématem, vyjadřujícím myšlenku, že všechny čtyři součástky tvoří systém fundamentálních součástek elektrotechniky. Například Kraemer publikoval v [19] trojúhelníkové schéma, znázorněné na obr. 13. Po srovnání s obr. 11 a 12 však zjišťujeme, že trojúhelníkové schéma nepřináší nic nového, jedná se pouze o modifikaci geometrie jednotlivých grafických objektů.

V následující části poukážeme na širší souvislosti daných schémat pasivních součástek s dřívějšími pracemi prof. Chuy a s dalším vývojem na poli tzv. mem-součástek.



Obr. 13. Trojúhelníkové schéma podle Kraemera [19].

5 Širší souvislosti

Použitím polovodičového memristoru v technických zařízeních dojde zřejmě ke změnám, které snesou srovnání se změnami, vyvolanými kdysi objevem tranzistoru. Ještě významnější je však skutečnost, že memristor nás nutí změnit i náš pohled na základní principy, podle nichž se řídí procesy v živé i neživé přírodě. Zdá se totiž, že memristor je pouze jedním z více „zvláštních“ prvků, jejichž existenci v minulosti tušilo jen několik málo lidí.

Je zajímavé, že další vývoj s sebou přináší zpochybňování základní teze z [1], že memristor (M) je čtvrtým základním pasivním prvkem, doplňujícím množinu pasivních prvků na kompletní systém typu R, L, C, M . Například Blaise Mouttet dokazuje v [12], že původní představa o memristoru jako o čtvrtém chybějícím elementu byla mylná a vysvětluje, že existují pouze tři fundamentální prvky (R, L a C); memristor, memkapacitor a meminduktor (viz další text) mají být pouze jejich paměťovými variantami.

Na konferenci [13] prof. Chua navrhuje zahájení výzkumu principiálně bezetrátových prvků typu memkapacitor a meminduktor, které by představovaly energeticky výhodnější alternativy memristoru jako paměti. V lednu 2009 vychází článek autorů Ventry, Pershina a Chuy [11], v němž je definována trojice pasivních prvků s pamětí – memristoru, memkapacitoru a meminduktoru rovnicemi, které jsou odvozeny ze stavových a branových rovnic obecných paměťových systémů. Na článek reaguje Mouttet v internetovém příspěvku [12] pokusem o zobecnění na memimpedanční a memadmitanční systémy.

Studium Chuových článků ze 70.-80. let minulého století přináší překvapující zjištění, že na řadu těchto otázek a problémů Chua ve skutečnosti již odpověděl před více než čtvrtstoletím. Bohužel informace obsažené v článcích nebyly v době jejich vzniku pro většinu technických pracovníků aplikačně zajímavé, a navíc se jednalo o teoreticky náročné záležitosti. Jistým problémem však je, že tento přístup některých badatelů do určité míry přetrvává i v současnosti.

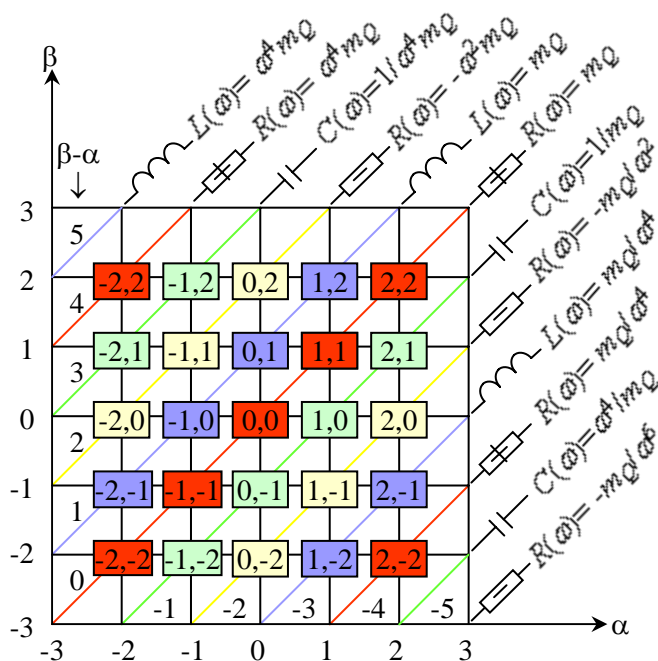
Již v závěrečných poznámkách základního Chuova článku [1] je zmíněno, že memristor může být speciálním případem tzv. prvků vyššího řádu, charakteristických vztahem mezi $u^{(m)}(t)$ a $i^{(n)}(t)$, kde $u^{(m)}(t)$ a $i^{(n)}(t)$ značí m -té a n -té časové derivace $u(t)$ a $i(t)$, tedy napětí a proudu prvku, pro $m > 0$ a $n > 0$,

případně integrály pro $m < 0$ a $n < 0$. Tak například induktor je charakteristický dvojicí $[m, n] = [-1, 0]$, čímž je vyjádřen vztah mezi tokem a proudem, neboli mezi integrálem (mínus první derivací) napětí a nulovou derivací proudu. Podle tohoto systému je možno klasifikovat další pasivní součástky R, C a M jako prvky typu $[0, 0]$, $[0, -1]$ a $[-1, -1]$. Protože na rozsah celočíselných hodnot m, n není kladeno žádné omezení, je zde tedy postulována možnost neohraničeného rozšiřování výše uvedené množiny prvků R, L, C, M .

V letech 1980-1983 napsal prof. Chua tři zásadní články z této oblasti [20]-[22], jejichž hlavní myšlenky později shrnul do rozsáhlé publikace [16]. V těchto pracech Chua vybudoval ucelenou matematickou teorii modelování nelineárních dynamických systémů se složitým chováním. Aktuálním příkladem takovýchto systémů jsou obvody ze světa nanotechnologií. Chua ukázal, že k účinnému modelování takovýchto systémů je zapotřebí obecně nekonečně mnoha základních hypotetických nelineárních obvodových prvků, z nichž lze zkoumaný systém věrně rekonstruovat podobně jako lze složit libovolně složitý signál z množiny elementárních vzájemně ortogonálních signálů. Pro charakterizaci každého takového prvku Chua definoval právě výše zmíněnou konstituční relaci jako jediný způsob „správného modelování“. Konstituční relace musí být pro daný prvek pečlivě zvolena tak, aby vypovídala pouze o vlastnostech prvku, nikoliv o vlastnostech okolí, s nímž prvek interaguje. Jen pak může sloužit jako charakteristika „správného modelování“ prvku za všech možných podmínek. Jako velmi ilustrativní příklad je v [16] uváděn kapacitor, uzavřený do „černé skříňky“, takže se vnějšímu pozorovateli jeví jako obecný dvojpól. Budíme-li svorky dvojpólu časově proměnným napětím harmonického průběhu a snímáme-li současně časový průběh odpovídajícího proudu, pak grafický záznam „proud versus napětí“ vede na Lissajousovy obrazce, které ovšem budou mj. záviset na kmitočtu budicího napětí. Tato charakteristika prvku tedy není jednoznačnou konstituční relací, neboť bude záviset nejen na vlastnostech prvku, ale i na parametrech budicího signálu. Při změně tvaru budicího signálu např. na obdélníkový průběh dojde k další modifikaci obrazce. Přitom postačí velmi málo – vynášet na svislou osu časový integrál proudu namísto proudu, tedy elektrický náboj, a výsledný obrazec nyní bude invariantní nejen vůči kmitočtu, ale i typu budicího signálu. Získáme obecně nelineární coulomb-voltovou charakteristiku kapacitoru jako konstituční relaci pro jeho „správné modelování“.

Jako stavební kameny „správného modelování“ složitých nelineárních systémů Chua zavádí množinu nekonečně mnoha prvků vyššího řádu. Každý z nich je v [16] nově označen jako tzv. (α, β) element a je axiomaticky definován konstituční relací mezi veličinami $u^{(\alpha)}(t)$ a $i^{(\beta)}(t)$, která je invariantní vůči způsobu signálového buzení součástky a jejímu začlenění do obvodu. Na základě linearizace konstituční relace v pracovním bodě a klasické Laplaceovy/Fourierovy transformace je zaveden koncept malosignálové impedance (α, β) elementu. Každý prvek vyššího řádu lze klasifikovat jako kmitočtově nezávislý (prvky R, L, C, M , jejichž malosignálové parametry, tj. odpor, indukčnost, kapacita a memristance jsou nezávislé na střídavém buzení), nebo kmitočtově závislý (rezistor, negativní rezistor, induktor, kapacitor, jejichž malosignálové parametry jsou závislé na kmitočtu). Na základě tohoto členění je vytvořena tzv.

periodická tabulka obvodových prvků na **obr. 14** jako obdoba známé Mendělejevovy tabulky chemických prvků [16].



Obr. 14. Periodická tabulka pasivních prvků (α, β) podle Chuy. Převzato a upraveno z [16]. Každý obdélníček s čísly α, β symbolicky znázorňuje (α, β) element. Symboly R, L, C a připojené vzorce představují malosignálové lineární modely prvků vyšších řádů.

Strukturu periodické tabulky lze pochopit na základě linearizace konstituční relace (α, β) elementu

$$u^{(\alpha)} = f(i^{(\beta)}) \quad (9)$$

v okolí pracovního bodu Q . Pak infinitesimální změny veličin $u^{(\alpha)}$ a $i^{(\beta)}$ kolem pracovního bodu, které označíme symboly $\tilde{u}^{(\alpha)}$ a $\tilde{i}^{(\beta)}$, jsou svázány strmostí (derivací) m_Q funkce f v bodě Q , neboli

$$\tilde{u}^{(\alpha)} = m_Q \tilde{i}^{(\beta)}. \quad (10)$$

Uvážíme-li, že indexy v závorkách znamenají řád časové derivace, pak Fourierova transformace $F\{\}$ rovnice (10) vede k následujícímu výpočtu malosignálové impedance $Z_Q(\alpha, \beta)$ elementu v pracovním bodě Q :

$$F\{\tilde{u}^{(\alpha)}\} = Z_Q(j\omega)F\{\tilde{i}^{(\beta)}\}, \quad (11)$$

$$Z_Q(j\omega) = (j\omega)^{\beta-\alpha} m_Q. \quad (12)$$

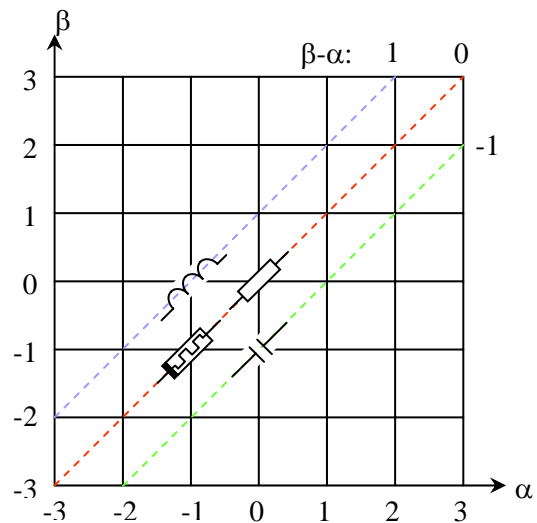
Je zřejmé, že charakter malosignálové impedance závisí na rozdílu $\beta-\alpha$. V periodické tabulce prvků na **obr. 14** je tento rozdíl parametrem sítě přímk. Pokud je nulový, impedance má odporový charakter. Pro 1 a -1 je charakter induktivní a kapacitní. Dvojka a mínus dvojka vede na záporné reálné číslo, záviřející na kmitočtu. Prvek se tedy chová jako kmitočtově závislý záporný odpor. Trojka má za následek záporné a mínus trojka kladné imaginární číslo a prvek má kapacitní, resp. induktivní charakter s kapacitou, resp. indukčností závislou na kmitočtu. Čtyřka, resp. mínus čtyřka

bude opět znamenat rezistivní charakter a prvek bude mít kladný kmitočtově závislý odpor.

Z **obr. 14** a rovnice (12) vyplývá, že všechny existující pasivní prvky lze rozdělit do dvou skupin, na prvky s kmitočtově nezávislými a kmitočtově závislými parametry (KNP, KZP). Skupina KNP je vymezena výčtem

$$\beta - \alpha = \{-1, 0, 1\}. \quad (13)$$

Obrazy daných prvků leží na třech odpovídajících přímkách na **obr. 14**. Z těchto prvků byly dosud zmapovány pouze prvky typu rezistor $[0, 0]$, kapacitor $[0, -1]$, induktor $[-1, 0]$ a memristor $[-1, -1]$, viz **obr. 15**.



Obr. 15. Místo pasivních prvků typu R, L, C a M v periodické tabulce pasivních prvků (α, β) .

Ostatní prvky patří do skupiny KZP. Všechny tyto prvky se stejným parametrem $\beta-\alpha$ mají identický kmitočtově závislý charakter impedance. Charakter impedance prvků se periodicky opakuje s periodou $|\beta-\alpha|=4$. Všechny kmitočtově závislé prvky lze rozdělit do těchto skupin podle parametru prvku:

- Záporný kmitočtově závislý odpor.
- Kmitočtově závislá indukčnost.
- Kmitočtově závislá kapacita.
- Kladný kmitočtově závislý odpor.

Na tomto místě je vhodné opět připomenout, že z hlediska „správného modelování“ je důležitá konstituční relace prvku, nikoliv kmitočtová závislost jeho impedance. V [16] je uveden příklad „nanocívky“. Experimentálně byl získán její náhradní model ve tvaru sériové kombinace lineárního rezistoru a lineárního induktoru, ovšem s parametry R a L závislými na kmitočtu procházejícího harmonického proudu. Takovýto model je prakticky nepoužitelný pro předpověď chování nanocívky po jejím napojení na vnější obvod, obsahující libovolnou nelineární součástku, např. obyčejnou diodu. Pak totiž v obvodu nenastane harmonický ustálený stav, který je nutnou podmínkou pro platnost modelu, založeného na konceptu impedance. „Správný model“ nanocívky je třeba složit z vhodných prvků vyšších řádů, jejichž konstituční relace bude ve výsledku věrně kopírovat chování nanocívky.

Vedlejším produktem této syntézy bude souhlas výsledného malosignálového modelu s experimentálním sériovým modelem kmitočtově závislých prvků R a L .

Z obr. 15 je zřejmé, že rezistor i memristor leží na stejné přímce o parametru $\beta - \alpha = 0$, takže jejich linearizované modely mají stejný charakter (kmitočtově nezávislý odpor). V rámci lineární teorie tedy memristor nemohl být odhalen. V této souvislosti je třeba mít na paměti, že s linearizovanými malosignálovými modely prvků vyšších řádů je třeba pracovat opatrně. Může se například stát, že pracovní bod prvku má nestabilní klidovou polohu, takže pak linearizace v okolí pracovního bodu pozbývá smyslu.

Z obr. 15 je rovněž patrné, že pasivní prvky R , L , C a M zabírají pouze 4 různé polohy v periodické tabulce, takže je zde prostor pro další elementární prvky. Podívejme se, jaké místo v tabulce by zaujímaly nově zaváděné součástky typu memkapacitor a meminduktor.

K odvození konstitučních relací použil Chua na přednášce [13] analogickou metodu jako u memristoru. Zatímco u resistoru je konstituční relací ampérvoltová charakteristika $i = f(u)$, u jeho paměťové varianty – memristoru, je to $q = f(\varphi)$. Nyní se na každou z os vynášejí časové integrály veličin z „nepaměťové“ varianty.

Konstituční relace pro memkapacitor je analogicky

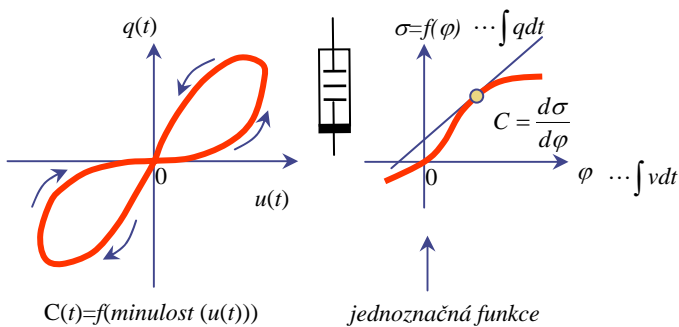
$$\sigma = f(\varphi), \text{ kde } \sigma = \int q dt, \tag{14}$$

a pro meminduktor

$$\rho = f(q), \text{ kde } \rho = \int \varphi dt. \tag{15}$$

Vysvětlující grafy jsou na obr. 16 a 17.

Coulomb-voltová charakteristika memkapacitoru je v důsledku paměťového efektu poznamenána hysterezí. Transformací souřadnic přes časové integrály dostáváme jednoznačnou konstituční relaci.

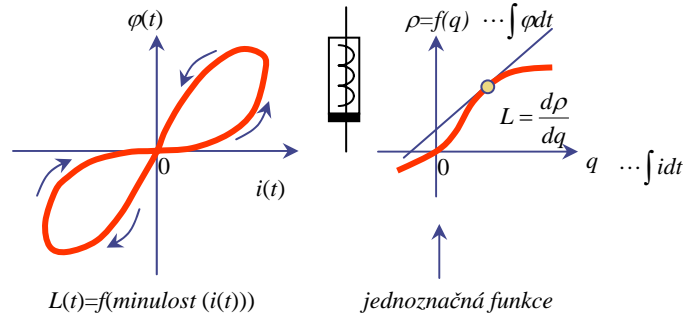


Obr. 16. K vysvětlení konstituční relace memkapacitoru.

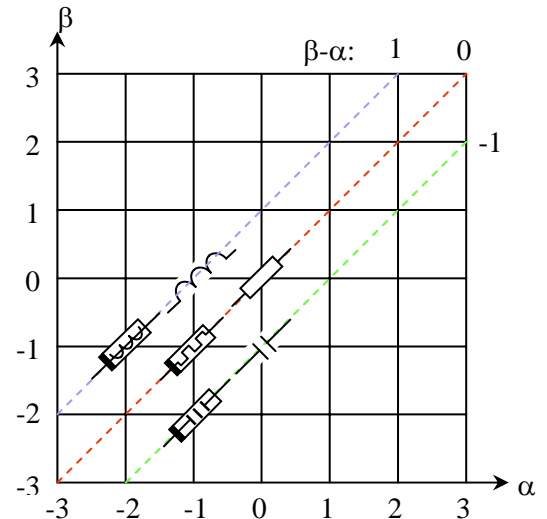
Z obr. 16 je zřejmé, že diferenciální parametr memkapacitoru, odvozený derivací konstituční relace v daném pracovním bodě, má rozměr Farad a jedná se tedy o (mem)kapacitu.

Obdobně se u meminduktoru projevuje paměťový efekt hysterezí weber-ampérové charakteristiky. Integrací signálů na obou osách získáme jednoznačnou konstituční relaci (15) meminduktoru. Diferenciální parametr má rozměr Henry a jde tedy o (mem)indukčnost.

Z (14) a (15) tedy vyplývá, že konstituční relace memkapacitoru, resp. meminduktoru popisuje souvislost mezi integrálem napětí a dvojnásobným integrálem proudu, resp. mezi dvojnásobným integrálem napětí a integrálem proudu. Memkapacitor je proto prvek typu $[-1, -2]$, zatímco meminduktor je prvek $[-2, -1]$. Z toho vyplývá jejich místo v periodické tabulce prvků na obr. 18.



Obr. 17. K vysvětlení konstituční relace meminduktoru.

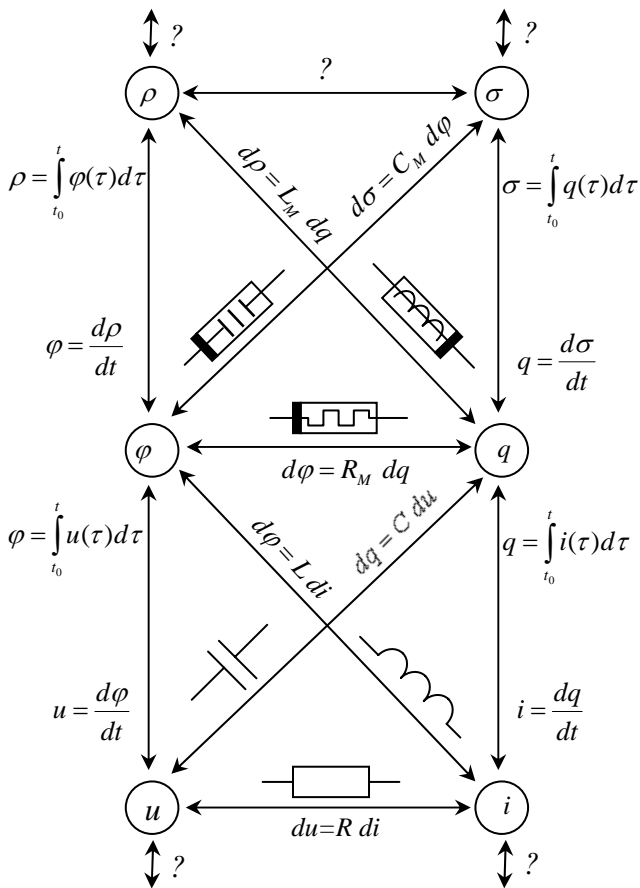


Obr. 18. Místo pasivních prvků typu R , L , C , M , memkapacitoru a meminduktoru v periodické tabulce pasivních prvků (α, β) .

Akumulační prvky s paměťovým efektem se tedy v periodické tabulce nacházejí na stejných přímkách, znamenajících stejný typ impedancí, jako jejich klasické varianty. Lineární memkapacitor se tudíž chová identicky jako lineární kapacitor a totéž platí pro (mem)induktor a induktor. Paměťový efekt je doménou nelineárních prvků.

Nyní je zřejmé, že periodická tabulka prvků představuje podstatně obecnější znázornění struktury fundamentálních prvků než originální čtvercové, případně trojúhelníkové schéma. Čtveřice prvků R , L , C , M netvoří úplný, tj. uzavřený systém fundamentálních pasivních součástek. Jedná se pouze o vybranou podmnožinu součástek s kmitočtově nezávislými parametry. Další součástky z této podmnožiny čekají na své objevení.

Zobrazení, představující řez periodickou tabulkou prvků s cílem poukázat na souvislost mezi klasickým čtvercovým schématem a neohrazenou množinou fundamentálních prvků, je na obr. 19.



Obr. 19. Systém pasivních prvků bez paměti a s jejich paměťovými variantami [24].

Schéma na obr. 19 lze připodobnit k rozestavěnému domu o dvou poschodích, a to poschodí klasických pasivních prvků R , L a C bez paměti, a navazujícího poschodí paměťových variant těchto prvků, tedy memristoru, memkapacitoru a meminduktoru. Ve skutečnosti se čtvrtá základní pasivní součástka – memristor, postulovaná Chuou na základě „čtvercové symetrie“, nachází již ve vyšším patře paměťových prvků. Je otázka, zda bude časem nalezeno něco zajímavého v dalších patrech. Z periodické tabulky prvků vyplývá, že prvky, čekající na své objevení, se mohou nacházet i v rozličných „mezipatrech“.

6 SPICE modelování memristivních systémů

Navzdory široké publicitě, která je objevu memristoru v laboratořích HP věnována, nejsou známy technické detaily vyvinuté součástky. Je k dispozici jednoduchý matematický model součástky jako memristivního systému, avšak výsledky, publikované v [3], jsou až na jednu výjimku výstupy počítačových simulací. Není zcela jasné chování memristoru v tzv. okrajových podmínkách, kdy hranice mezi vodivou a nevodivou vrstvou se přibližuje k platinovým elektrodám. Pro zjednodušené modelování navrhl Joglekar speciální okénkovou funkci [8]. Je však otázka, do jaké míry tyto funkce odrážejí realitu. Řada technických údajů, např. hraniční odpory memristoru R_{on} a R_{off} , napětí a proudy memristoru a kmitočty aplikovaného napětí jsou uváděny jako normované, nikoliv

absolutní veličiny. Podstata fyzikálních jevů, na jejichž základě stojí chování součástky, je objasňována povrchně a s využitím známých zákonitostí, platných pro mechanismy fungování PN přechodů [13], které však zřejmě u memristoru HP neplatí v plném rozsahu. Z osobní korespondence [24] mezi prof. Chuou a spoluautorem článku vyplývá, že tyto detaily nemá k dispozici ani prof. Chua.

Tato situace mimo jiné poněkud komplikuje tvorbu potřebných modelů pro počítačové simulace memristoru. Přitom potřeba takovýchto modelů je umocněna skutečností, že vzorky memristoru jako komerční součástky ještě dlouho nebudou k dispozici (podle [13] to bude minimálně za 3 roky a maximálně za 5 let). V technické veřejnosti je zájem zejména o SPICE model memristoru. Podle [24] a Internetových zdrojů jsou dnes k dispozici tři různé SPICE modely, fungující na základě dosud uvolněných informací o memristoru HP: Jeden vznikl na Technické univerzitě Budapešť pod vedením prof. Rosky, druhý byl publikován v březnu 2009 v časopise Electronics Letters [25] a třetí vyvinul kolektiv autorů tohoto článku [26]. Posledně zmíněný model je oproti [25] vytvořen pro PSpice a je podstatně jednodušší při zachování přesnosti modelování chování HP memristoru. O model z [26] projevila zájem firma Spectrum Software z USA, producent simulačního programu Micro-Cap [28], která jej zařazuje do poslední verze programu do základních knihoven modelů součástek. V [23] je uvedená technika modelování rozšířena i na další mem-systémy typu memkapacitor a meminduktor. SPICE modelování memristoru se stává i tématem diplomových prací v zahraničí [29].

Techniku modelování vysvětlíme na příkladu SPICE modelu HP memristoru [26].

Model HP memristoru je představován rovnicemi (1), (2), (3) a blokovým schématem na obr. 4. Rovnice (1) vyjadřuje skutečnost, že rychlost rozhraní vodivé a nevodivé vrstvy je přímo úměrná proudu, tekoucímu memristorem. Pro účely přesnějšího modelování je třeba rovnici (1) zpřesnit na tvar [26]

$$\frac{dx}{dt} = ki(t)f(x), k = \frac{\mu_v R_{ON}}{D^2}, \quad (16)$$

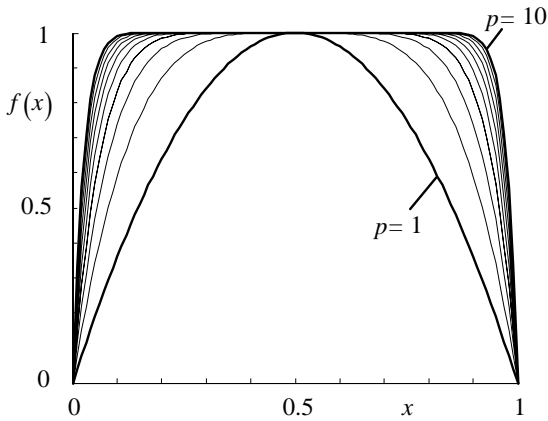
kde μ_v je tzv. průměrná mobilita dopantů o hodnotě cca $10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$. V [3] je zmínka o tom, že v „nano-zařízeních“ mohou i malá napětí způsobovat enormně vysoké intenzity elektrického pole, které druhotně vyvolávají významné nelinearity v transportu ionů. Tyto nelinearity se konkrétně projevují na okrajích tenké vrstvy, kdy rychlost rozhraní klesá při přibližování k oběma okrajům vrstvy postupně k nule. Tento jev, označovaný jako nelineární drift, lze modelovat tzv. okénkovou funkcí $f(x)$ na pravé straně diferenciální rovnice (16). Konkrétní okénková funkce, která by odpovídala nelineárnímu driftu memristoru, vyrobenému v HP laboratořích, není v tuto chvíli známa.

Zdroj [8] navrhuje okénkovou funkci ve tvaru

$$f(x) = 1 - (2x - 1)^{2p}, \quad (17)$$

kde p je celé kladné číslo.

Tvar funkce (17) vždy zaručuje nulovou rychlost rozhraní na krajích memristoru a navíc s rostoucím p zanikají rozdíly mezi modelem s lineárním a nelineárním driftem.



Obr. 20. Okénkové funkce podle Joglekara [8].

Při konstrukci okénkové funkce podle (17) se vycházelo z předpokladu, že rychlost rozhraní závisí pouze na jeho aktuální poloze uvnitř tenké vrstvy, tj. na stavové proměnné x nezávisle na směru proudu memristorem. Z tohoto předpokladu a z podoby funkce (17) by vyplývalo, že:

- Při zadávání počátečních podmínek simulace bychom se museli vyhýbat mezním stavům s nulovým driftem $x=0$ (tj. $R_{mem}=R_{off}$) a $x=1$ (tj. $R_{mem}=R_{on}$). Memristor by se z nich nemohl dostat žádným vnějším buzením. Takováto vlastnost je však v rozporu s očekávaným chováním reálné součástky.
- K návratu memristoru z mezních stavů blízkých k $x=0$ nebo $x=1$ může dojít pouze tehdy, proteče-li jím stejné množství náboje, které ho do tohoto stavu dostalo, ale v opačném směru. To odporuje základní fyzikální představě o příčinách postupného snižování rychlosti rozhraní, když se *přibližuje* k nepřekročitelnému okraji tenké vrstvy. Kupříkladu, kdyby memristorem celý rok tekla konstantní proud I , pak po jeho přepólování na $-I$ by trvalo opět celý rok, než by se dostal do původního stavu. Při *oddalování* od okraje vrstvy při změně směru proudu by tedy měly platit jiné zákonitosti než při *přibližování* k tomuto okraji, což navrhovaný model nebere v potaz.

Proto byla navržena jiná koncepce okénkové funkce, která by lépe odpovídala reálnému chování memristoru.

Úpravou diferenciální rovnice (16) a následnou integrací obou stran dostaneme

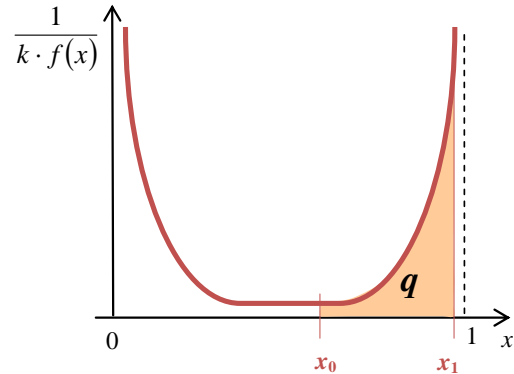
$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{k \cdot f(\xi)} = \int_{t_0}^{t_1} i(\tau) d\tau \quad (18)$$

Integrál na pravé straně (18) je celkový náboj, který protekl memristorem za čas t_1-t_0 . Tomu odpovídá posun rozhraní mezi dotovanou a nedotovanou vrstvou od x_0 do x_1 (viz obr. 21).

Celkový náboj, který byl potřebný k posunu rozhraní mezi x_0 a x_1 , je znázorněn plochou pod křivkou $\frac{1}{k \cdot f(x)}$ na obr. 21.

Aby se memristor dostal zpět do původního stavu x_0 , musí jím protéct stejné množství náboje (18), avšak v opačném směru. Memristor si tedy podle tohoto modelu „pamatuje“ veškerý elektrický náboj, tedy i ten, který jím protékal po libovolně dlouhou dobu, když se rozhraní asymptoticky přibližovalo

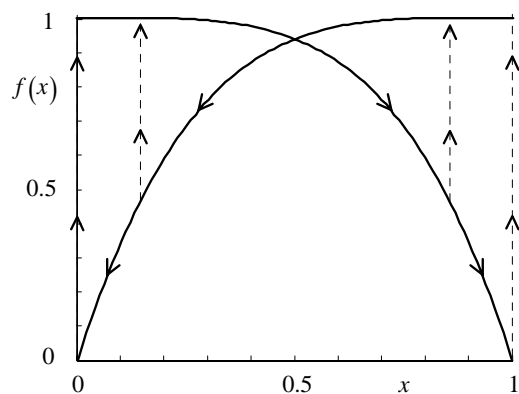
ke svému maximu $x=1$. Při buzení memristoru konstantním proudem by to znamenalo, že k tomuto návratu je zapotřebí stejného času t_1-t_0 .



Obr. 21. Grafická interpretace náboje prošlého memristorem.

Memristor, vyrobený v laboratořích HP, si ve skutečnosti „nepamatuje“ množství elektrického náboje, který jím prošel. Veškerá jeho paměť spočívá v „zapamatování“ polohy rozhraní mezi dotovanou a nedotovanou oblastí tenké vrstvy a tato poloha je přímo úměrná velikosti náboje pouze v aktivní oblasti memristoru. Dostane-li se do blízkosti okrajů $x=0$ nebo $x=1$, pamatuje si přesně pouze svou polohu, nikoliv náboj.

Z výše uvedeného vyplývá, že okénkovou funkci lze považovat za míru toho, jak přesně si memristor pamatuje hodnotu prošlého náboje: na okrajích tuto paměť ztrácí, informace o množství proteklého náboje je nevratně ztracena. Dojde-li v této situaci ke změně směru proudu, začíná se rozhraní pohybovat opačným směrem bez ohledu na minulost, která je zapomenuta, tj. podle jiné křivky.



Obr. 22. Návrh nové okénkové funkce, viz rovnice (19), $p = 2$.

Koncepce okénkové funkce, zohledňující toto hledisko, je na obr. 22. Ke zpomalování rychlosti rozhraní dochází pouze při *přibližování* k okraji vrstvy. V okamžiku změny směru proudu mizí příčina zpomalování, minulost je zapomenuta a rozhraní se blíží podle původní zákonitosti (na obr. 22 znázorněné zrcadlově otočenou křivkou) k opačnému okraji, kde bude opět zpomaleno.

Funkece podle obr. 22 je tedy závislá nejen na stavu x , ale také na znaménku rychlosti rozhraní neboli na směru protékajícího proudu. Těmto požadavkům dobře vyhovuje funkce

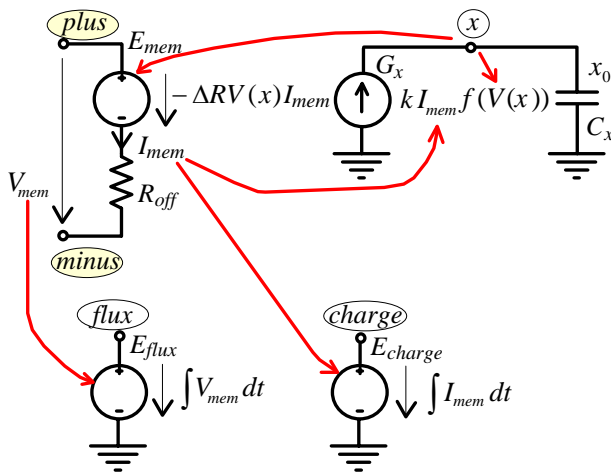
$$f(x) = 1 - (x - \text{stp}(-i))^{2p}, \quad (19)$$

kde p je kladné celé číslo, i je proud tekoucí memristorem a

$$\text{stp}(i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i \geq 0 \\ 0 & \text{pro } i < 0 \end{cases}, \quad (20)$$

přičemž za kladný směr proudu se považuje takový, který zvětšuje šířku dotované vrstvy neboli $x \rightarrow 1$. Hodnota výrazu (19) nabývá při dosažení obou okrajů nulových hodnot, zvyšováním koeficientu p lze dosáhnout maximálně ploché charakteristiky se strmými závěrečnými propady k nule.

Paměťový efekt memristoru je modelován zpětnovazebně řízeným integrátorem podle obr. 4, který, s přihlédnutím k omezujícím okrajovým podmínkám, strádá účinky protékajícího proudu a prostřednictvím změny polohy rozhraní přímo ovládá hodnotu odporu memristoru. Nelinearitě driftu a vliv okrajových podmínek modeluje zpětná vazba zavedená přes okénkovou funkci $f()$.



Obr. 23. Struktura SPICE modelu memristoru.

Struktura SPICE modelu memristoru je představena na obr. 23. Vztah mezi napětím a proudem memristoru je modelován na základě upravené rovnice (3). Tomu odpovídá v modelu na obr. 23 odpor R_{off} v sérii se zdrojem napětí typu E , jehož svorkové napětí je řízeno vzorcem typu „ $x\Delta R$ “. Normovaná šířka dopované vrstvy x je modelována napětím $V(x)$ na kapacitoru C_x , který slouží jako integrátor veličin na pravé straně stavové rovnice (16). Počáteční stav normované šířky dotované vrstvy x_0 , který je modelován jako počáteční napětí kapacitoru, se určí z počátečního odporu R_{init} memristoru podle vztahu, odvozeného z (3):

$$x_0 = \frac{R_{off} - R_{init}}{\Delta R}. \quad (21)$$

Model je implementován jako SPICE podobvod, kterému je možno předat jako parametry počáteční hodnotu odporu R_{init} a mezní hodnoty R_{off} , R_{on} , dále šířku tenké vrstvy D , koeficient migrace μ_v a parametr okénkové funkce p . V níže uvedeném výpisu jsou zapsány modely jak klasické okénkové funkce podle Joglekara [8], tak i nově navrhované funkce (19). Kromě kompaktního zápisu funkce (19) s využitím PSPICE funkce

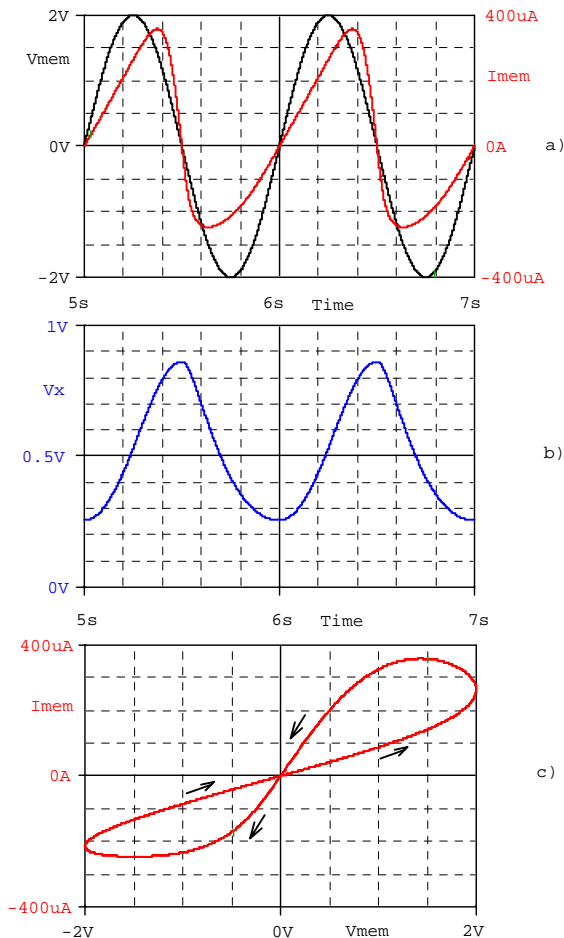
STP nabízí model možnost naprogramovat si dva na sobě nezávislé průběhy pro oba směry protékajícího proudu pomocí funkcí $ON()$ a $OFF()$. Tímto je model otevřen pro upřesnění popisu nelinearity driftu např. na základě experimentálně zjištěných dat.

SPICE model memristoru je rozšířen o přímý výpočet integrálních veličin, které vlastně memristor definují, tj. časový integrál elektrického napětí („flux“) a časový integrál elektrického proudu („charge“). Tyto veličiny jsou součástí výsledků SPICE analýzy ve formě napětí interních řízených zdrojů E_{flux} a E_{charge} .

```

* HP Memristor SPICE Model
* For Transient Analysis only
* created by Zdenek and Dalibor Bielek
*****
* Ron, Roff - Resistance in ON / OFF States
* Rinit - Resistance at T=0
* D - Width of the thin film
* uv - Migration coefficient
* p - Parameter of the WINDOW-function
* for modelling nonlinear boundary conditions
* x - W/D Ratio, W is actual width of the doped
* area (from 0 to D)
*
.SUBCKT memristor Plus Minus PARAMS:
+ Ron=1K Roff=100K Rinit=80K D=10N uv=10F p=1
*****
* DIFFERENTIAL EQUATION MODELING *
*****
Gx 0 x value={ I(Emem)*uv*Ron/D^2*f(V(x),p)}
Cx x 0 1 IC={(Roff-Rinit)/(Roff-Ron)}
Raux x 0 1T *****
* RESISTIVE PORT OF MEMRISTOR *
*****
Emem plus aux value={-I(Emem)*V(x)*(Roff-Ron)}
Roff aux minus {Roff}
*****
*Flux computation*
*****
Eflux flux 0 value={SDT(V(plus,minus))}
*****
*Charge computation*
*****
Echarge charge 0 value={SDT(I(Emem))}
*****
* WINDOW FUNCTIONS
* FOR NONLINEAR DRIFT MODELLING *
*****
*** Window Function according to Joglekar:
func f(x,p)={1-(2*x-1)**(2*p)}
*** Proposed Window Function, compact form:
;func f(x,i,p)={1-(x-stp(-i))**(2*p)}
*** Proposed Window Function, On-and-Off-form:
;func ON(x,p)={1-x**(2*p)}
;func OFF(x,p)={1-(x-1)**(2*p)}
;func f(x,i,p)={if(i>0,ON(x,p),OFF(x,p))}
.ENDS memristor
    
```

Vyvinutý SPICE model byl použit k simulacím, popisovaným v [3]. Výsledky jsou uvedeny na obr. 24, 25 a 26. Ve všech případech se jedná o buzení memristoru zdrojem napětí.

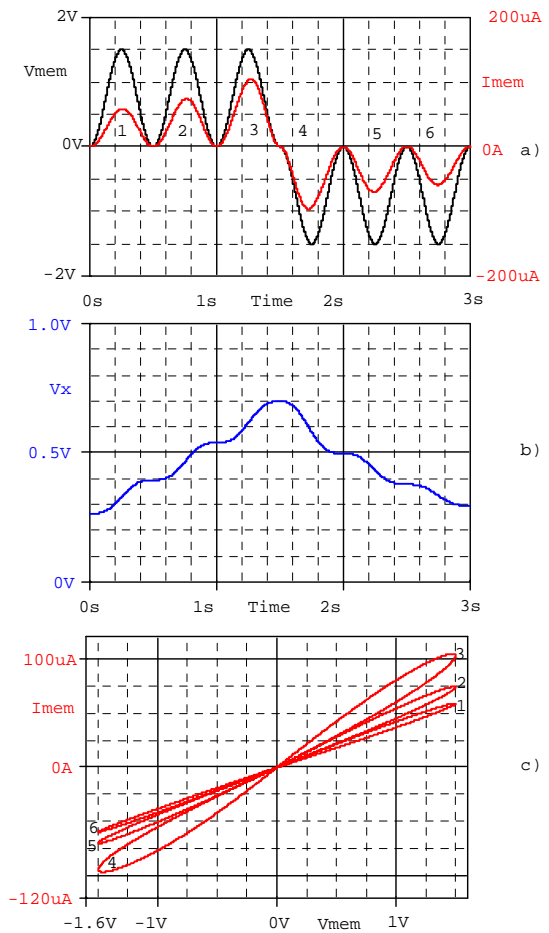


Obr. 24. Memristor o parametrech $R_{on}=100\ \Omega$, $R_{off}=16\ \text{k}\Omega$, $R_{mi}=100\ \Omega$, $p=10$, buzený harmonickým napětím o amplitudě 2 V a kmitočtu 1 Hz. Simulace potvrzuje hysterezi v A/V charakteristice memristoru [3].

Z časových průběhů napětí V_x na **obr. 24** a **25** vyplývá, že dané obrázky odpovídají režimu práce memristoru, kdy hranice mezi dotovanou a nedotovanou vrstvou si vždy zachovává odstup od okrajů vrstvy, v nichž se projevují nelineární okrajové efekty. Podrobnější simulace ukazují, ve shodě s výsledky publikovanými v [3], že typické hysterezní efekty v A/V charakteristikách jsou postupně potlačovány při růstu kmitočtu budicího signálu.

Obr. 26 ukazuje výsledky simulací při nižších poměrech odporů R_{off} a R_{on} , které vedou, spolu s dostatečně velkou amplitudou budicího napětí, k vzniku spínacích efektů [3]. Z **obr. 26 b)** je zřejmé, že k tomuto spínání skutečně dochází pulsováním normované šířky x dotované oblasti mezi limitními hodnotami 0 a 1. Tomu odpovídá, ve shodě s [3], i typický obrazec ampérvoltové charakteristiky na **obr. 26 c)**

Testování SPICE modelu HP memristoru ukázalo, že pomocí nově vyvinuté okénkové funkce (19) lze reprodukovat všechny výsledky, uvedené v [3], s výjimkou spínacích efektů v režimu silně nelineárního driftu, charakteristických symetrickou hysterezní křivkou na **obr. 26 c)**. Tento případ je věrně modelován pomocí okénkové funkce podle Joglekara, jejíž obecné použití se však jeví s uvážením výše uvedeného jako problematické. Ukazuje se tedy, že další vývoj modelu memristoru by měl spočívat ve vhodné modifikaci okénkové funkce, která by neměla záviset pouze na stavové proměnné x . Předpokládáme však,



Obr. 25. Memristor o parametrech $R_{on}=100\ \Omega$, $R_{off}=38\ \text{k}\Omega$, $R_{mi}=100\ \Omega$, $p=10$, buzený napětím typu $\pm(V_0 \sin \omega t)^2$ o $V_0=1.22\ \text{V}$ a kmitočtu $f_0=1\ \text{Hz}$. Simulace potvrzuje vícenásobnou hysterezi v A/V charakteristice memristoru [3].

že k urychlení tohoto vývoje by mohlo dojít až po uvolnění podrobnějších informací o působení nelineárního driftu dopantů.

7 Závěr

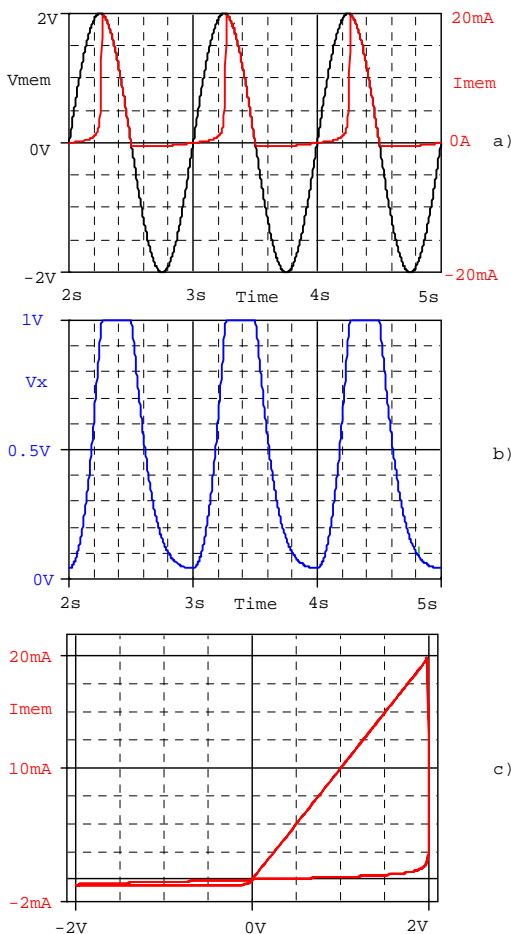
Od r. 1971 figuroval memristor ve vědecké literatuře pouze jako hypotetický prvek. Přestože byly dopředu známy jeho vlastnosti, málokdo věřil, že se podaří jej objevit a využívat jako pasivní součástku, podobně jako je tomu u prvků typu R , L a C . Vědělo se, že má vlastnosti mnoha memristivních systémů, které se kolem nás zcela běžně vyskytují. Dnes víme, že memristor se hledal „na špatném místě“. Přiliš se lpělo na představě, že tato součástka musí mít co do činění s *magnetickým* tokem, jak to kdysi předpověděl Leon Chua. Teprve květen 2008 přinesl velmi hmatatelný důkaz, že memristivní chování je přirozeným jevem ve světě nanometrických rozměrů.

Memristor nebyl původním cílem výzkumu, proto byl objeven v laboratořích Hewlett Packard nečekaným, ale o to příjemnějším překvapením. Podle [15] nemuselo k objevu vůbec dojít, kdyby si spolupracovník Greg Snider nepovšiml, že hysterezní křivky, zjišťované dennodenně na měřených vzorcích, se nápadně podobají grafům ze zapomenuté práce [1] z r. 1971 o memristoru.

Příběh o memristoru nám dává vynikající poučení o ceně vzdělanosti. Přestože teorie memristivních systémů je velmi dobře propracována už přes 30 let a umožňuje pochopit obecné principy paměťového chování dynamických systémů, do dnešní doby o ní vědělo jen velmi málo lidí. Naštěstí mezi ně patřil i pracovník Hewlett Packard G. Snider, který stál u zrodu memristoru.

Je zcela zřejmé, že mnohé ze zásadních teoretických prací, které vznikly bezprostředně po objevu HP memristoru, mohly být napsány kdykoliv během předešlých 37 let. Memristor nám zde nastavuje zrcadlo: poznání fundamentálních principů světa, ve kterém žijeme, je často vyhodnoceno jako bezcenné, pokud nevede k bezprostřednímu zisku. Mediálně přitažlivější jsou témata typu „instant turn-on computers“, která fungují i jako lákadla pro návštěvníky mezinárodních vědeckých konferencí [27].

Memristor bude zřejmě ještě dlouho nedostupný jako součástka, se kterou by bylo možno experimentovat. SPICE model memristoru, popsáný v části 6, mohou využít zájemci o počítačové experimenty s touto zajímavou součástkou, a to buď přímým využitím publikovaného podobvodu SPICE, nebo prostřednictvím programu Micro-Cap, jehož evaluační verze je volně k stažení na Internetové adrese firmy Spectrum Software [28].



Obr. 26. Memristor o parametrech $R_{on}=100 \Omega$, $R_{off}=5 \text{ k}\Omega$, $R_{ini}=1 \text{ k}\Omega$, $p=10$, buzený harmonickým napětím o amplitudě 2 V a kmitočtu 1 Hz. Simulace potvrzuje výrazné spínací efekty v memristoru [3].

Literatura

- [1] Chua, L.O. Memristor – The Missing Circuit Element. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-18, No. 5, September 1971, p. 507 – 519.
- [2] Chua, L.O., Kang, S.M. Memristive Devices and Systems. *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, No. 2, February 1976, p. 209 – 223.
- [3] Strukov, D.B., Snider, G.S., Stewart, D.R., Williams, R.S. The missing memristor found. *Nature (London)*, vol. 453, May 2008, p. 80 – 83.
- [4] Williams, S.R. Electrically actuated switch. United States Patent Application 20080090337, 04/17/2008.
- [5] Johnson, R.C. Memristors ready for prime time. *EETimes*, 2008, August 7, <http://www.eetimes.com/showArticle.jhtml?articleID=208803176>.
- [6] Johnson, R.C. 3-D memristor chip debuts. *EETimes*, 2008, November 26, <http://www.eetimes.com/showArticle.jhtml?articleID=212200673>
- [7] Johnson, R.C. Will memristors prove irresistible? *EETimes*, 2008, September 1, <http://www.eetimes.com/showArticle.jhtml?articleID=210004310>
- [8] Joglekar, Y.N., Wolf, S.J. The elusive memristor: properties of basic electrical circuits. *arXiv:0807.3994 v2* [cond-mat.mes-hall] 13 January 2009, p.1-24.
- [9] Wang, F.Y. Memristor for introductory physics. *arXiv:0808.0286 v1* [physics.class-ph], 4 August 2008, p.1-4.
- [10] Pershin, J.V., Fontaine, S.L., Ventra, M.D. Memristive model of amoeba's learning. *arXiv: 0810.4179 v2* [q-bio.CB] 24 October 2008, p.1-18.
- [11] Ventra, M., Pershin, J.V., Chua, L.O. Circuit elements with memory: memristors, memcapacitors and meminductors. *arXiv:0901.3682 v1* [cond-mat.mes-hall] 23 January 2009, p.1-6.
- [12] Mouttet, B. An Introduction to Memimpedance and Memadmittance Systems Analysis. <http://knol.google.com/k/blaise-mouttet/an-introduction-to-memimpedance-and/23zgknsxn1chu/5#view>
- [13] <http://webcast.berkeley.edu/events.php> - kompletní videozáznam symposia *Memristor and Memristive Systems*, Berkeley, November 2008.
- [14] Oster, G.F., Auslander, D.M. The Memristor: A New Bond Graph Element. *Trans. ASME on Dynamical Systems, Measurement and Control*, vol. 94, No. 3, 1972, p. 249 – 252.
- [15] Williams, R.S. How we found the missing memristor. *IEEE Spectrum*, 2009, December 1, p. 1-11, www.spectrum.ieee.org/print/7024
- [16] Chua, L.O. Nonlinear circuit foundations for nanodevices, Part I: The Four-Element Torus. *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 11, November 2003, p. 1830-1859.

- [17] Biolek, Z., Biolek, D. Úvod do studia memristoru. *Perspektivy elektroniky* 2009, Rožnov. p.R., 26.3.2009, p. 115-130. ISBN 978-80-254-4052.
- [18] Tour, J.M., He, T. The fourth element. *Nature (London)*, vol. 453, May 2008, p. 42 – 43.
- [19] Kraemer, T. HP memristor math visualization. <http://thomaskraemer.blogspot.com/2008/05/hp-memristor-math-visualization.html>.
- [20] Chua, L. Device Modeling Via Basic Nonlinear Circuit Elements. *IEEE Trans. On CAS*, vol. CAS-27, No. 11, 1980, p. 1014-1044.
- [21] Chua, L., Szeto, E.W. High-Order Non-Linear Circuit Elements: Circuit-Theoretic Properties. *Circuit Theory and Applications*, vol. 11, 1983, p. 187-206.
- [22] Chua, L., Szeto, E.W. Synthesis of Higher Order Nonlinear Circuit Elements. *IEEE Trans. On CAS*, vol. CAS-31, No. 2, 1984, p. 231-235.
- [23] Biolek, D., Biolek, Z., Biolková, V. SPICE Modeling of Memristive, Memcapacitive and Meminductive Systems. Přijato na Evropskou konferenci *ECCTD 2009*, Antalya, Turkey.
- [24] Korespondence mezi prof. Chuou a prof. Biolkem, emaily z února 2009.
- [25] Benderli, S., Wey, T.A. On SPICE macromodelling of TiO₂ memristors. *Electronics Letters*, vol. 45, no. 7, March 26, 2009, p. 377 – 379.
- [26] Biolek, Z., Biolek, D., Biolková, V. SPICE model of memristor with nonlinear dopant drift. *Radioengineering*, vol. 18, no. 2, Part II, p. 210-214, June 2009. ISSN 1210-2512.
- [27] *ECCTD 2009*, European Conference on Circuit Theory and Design 2009, Antalya, Turkey, August 23 to 27, 2009, <http://ecctd09.dogus.edu.tr>
- [28] Micro-Cap, simulační program pro elektrotechniku. *Spectrum-Software*, California, USA, www.spectrum-software.com.
- [29] Skribe, G. Modeliranje memristorja. Diplomová práce, FERI, Univerzita Maribor, Slovinsko, 2009. <http://dkum.uni-mb.si/Iskanje.php?type=enostavno&niz=memristor&vir=dkum>

Pozn.: Všechny Internetové odkazy jsou platné ke dni 6.7.2009.