

„TWO-CAPACITOR PROBLEM“ IN THE PEDAGOGICAL PRACTICE

„PROBLÉM DVOU KAPACITORŮ“ V PEDAGOGICKÉ PRAXI

Zdeněk Biolek

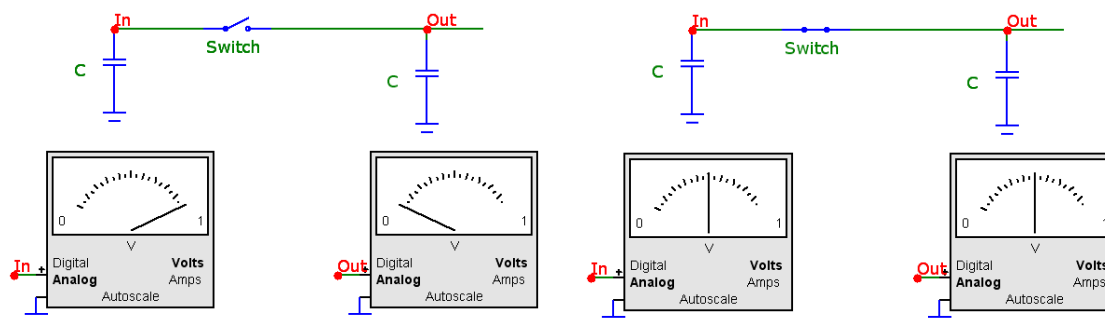
Střední škola informatiky, elektrotechniky a řemesel, Školní 1610, Rožnov p.R.,
zdenek.biolek@roznovskastredni.cz

Abstract:

This contribution deals with the well-known “two-capacitor problem” and with its possible uses for education purposes at high schools or universities.

1. Úvod

K pochopení vzájemných vztahů mezi elektrickým nábojem, napětím a kapacitou kondenzátoru se dá použít experimentu, jehož uspořádání je znázorněno na obr. 1. Kondenzátor nabitý na určité napětí se uzavřením spínače připojí k nenabitému kondenzátoru o stejné kapacitě, přičemž se neustále sleduje napětí na obou kondenzátorech.



Obr. 1. Experiment, při kterém se k nabitému kondenzátoru připojí nenabitý.

Napětí na obou kondenzátorech se ustálí na polovině výchozí hodnoty. K tomuto výsledku by měl i bez experimentu dospět žák, který zná pojmy „elektrický náboj“ Q , „elektrické napětí“ U a „kapacita“ C , rozumí jejich vzájemnému vztahu $Q = C \cdot U$ a pochopil význam zákona zachování elektrického náboje. Pak by si měl odvodit, že náboj nabitého kondenzátoru se po uzavření spínače přerozdělí mezi dva stejné kondenzátory, čímž na každý z nich připadne pouze polovina výchozí hodnoty. To znamená, že napětí na spojených kondenzátorech musí být rovněž poloviční.

Žák, který ví, že energie uskladněná v kondenzátoru se vypočítá jako

$$E_c = \frac{1}{2} C \cdot U^2, \quad (1)$$

však může být z výsledku experimentu zmaten. Po uzavření spínače je napětí na obou kondenzátorech ve srovnání s napětím původně nabitého kondenzátoru *poloviční*, tudíž je v každém z nich pouze *čtvrtinové* množství původní energie. Po uzavření spínače tedy klesne množství energie uskladněné v obvodu na polovinu. Polovina původní energie se „ztratí“.

Tento paradox je znám jako „Problém dvou kondenzátorů“ a je dostatečně popsán v literatuře [1-4]. Představuje zároveň zajímavou učební látku, kterou lze použít na střední i vysoké škole.

2. Kam se poděla ztracená energie?

„Ztracenou energii“ je nutno připsat na vrub ztrátám, vznikajícím nejrůznějšími způsoby. Pro pedagogy však vzniká problém metodický, neboť k výše uvedenému paradoxu lze dospět již v počátečních fázích studia na střední odborné škole při probírání elektrostatického pole.

Prvním problémem je pochopení vzorečků. Na středoškolské úrovni je žák veden k tomu, aby uměl aplikovat vzorečky na konkrétní zadání – např. aby vypočítal, jak se změní napětí na nabitém kondenzátoru poté, co se k němu připojí jiný nenabitý kondenzátor [5]. Je iluzorní se domnívat, že na tomto stupni studia by žák mohl výchozím vzorcům skutečně rozumět, což se týká hlavně vztahu (1) pro energii nabitého kondenzátoru. Pokus o jeho odvození v základní středoškolské učebnici [6] nemá metodicky valný smysl, neboť v této fázi žáci ještě neznají diferenciální počet. Vzhledem ke stále klesající úrovni uchazečů o středoškolské studium se na většině škol od takovýchto důkazů upouští a vzorec je žákům předložen jako hotový fakt. Setká-li se žák „tváří v tvář“ s paradoxem „ztracené energie“, může být jeho důvěra v naučený vzoreček těžce zkoušena, příp. obětována ve prospěch zákona o zachování energie, který je mu bližší, neboť jej má zažitý ještě ze základní školy.

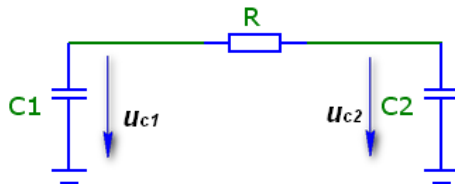
Druhý problém spočívá v tom, že žák ještě nemůže mít správnou představu o modelování fyzikálních dějů. Začínající středoškolák stěží bude uvažovat o všudypřítomných ztrátách a je proto typické, že místo zákona o zachování náboje, který je pro něj nový, aplikuje zákon o zachování energie, avšak jediným způsobem, kterého je schopen, což je v této situaci chyba - „po připojení nenabitého kondenzátoru k nabitému zůstane energie soustavy zachována“. Takovýto výchozí předpoklad ovšem vede k nesprávnému výsledku.

Třetí problém je v tom, že se stále ještě vedou vědecké spory o to, jak paradox dvou kondenzátorů metodicky správně vysvětlovat. Při rovnosti kapacit obou kondenzátorů se totiž vždy ztratí *polovina* původní energie bez ohledu na fyzikální mechanismus, jakým ke ztrátám dochází – ať už to jsou ohmické ztráty, ztráty v dielektriku, ztráty vzniklé vyzařováním kondenzátoru jako dipólu [3] apod. Tyto závěry vedou některé badatele k formulaci obecných zákonitostí, jejichž zařazení do výuky by mohlo metodické těžkosti zažehnat [4].

V současné době se zdá být moudrým řešením odsunout vysvětlování zmíněného paradoxu do pozdějších fází výuky, kdy již žáci disponují potřebnou teoretickou výbavou. Jedincům, kteří ke zmíněnému paradoxu dojdou, může být podáno vysvětlení úměrné jejich úrovni poznání – polovina energie jde na vrub ztrátám, z nichž nejpochopitelnější pro ně budou Jouleovy ztráty na všudypřítomných nenulových odporech v obvodu.

3. Zákonitosti ztracené energie

Ve druhé polovině studia na středních odborných školách se žáci seznamují se základy diferenciálního a integrálního počtu. Tento aparát jim umožní odvodit si vztah (1) pro energii nabitého kondenzátoru. Žáci v této etapě studia již také chápou, co je to přechodový děj a mohou si odvodit, kolik energie se nakonec dostane z kondenzátoru o kapacitě C_1 nabitého na napětí $u_{c1}(0)$ do nenabitého kondenzátoru o kapacitě C_2 .



Obr. 2. Model vybíjení kondenzátoru C_1 do kondenzátoru C_2 .

Následující zadání vychází z obr. 2, na kterém je odpor R znázorněn celkový ohmický odpor smyčky.

1. Dokažte, že po uplynutí přechodového děje bude napětí na obou kondenzátorech rovno

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{c1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_{c2}(t) = \frac{u_{c1}(0)}{1 + \frac{C_2}{C_1}}. \quad (2)$$

2. Ukažte, že během přelévání energie $E_{c1}(0)$ z C_1 do C_2 se na odporu R ztratí energie

$$E_R = \frac{E_{c1}(0)}{1 + \frac{C_1}{C_2}}. \quad (3)$$

3. Odvoďte, že platí

$$E_R = \frac{1}{2} u_{c1}(0) \cdot \Delta Q, \quad (4)$$

kde ΔQ je celkový náboj, který byl přesunut z kondenzátoru C_1 do kondenzátoru C_2 .

Z rovnice (3) vyplývá, že na odporu R se ztratí přeměnou v teplo $1/n$ -tina z původní energie kondenzátoru C_1 , kde $n = 1 + \frac{C_1}{C_2}$, a to bez ohledu na velikost odporu. Při rovnosti

kapacit $C_1 = C_2$ se ztratí právě polovina původní energie. Doplněk čísla $1/n$ do jedničky je účinnost

$$h = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}}, \quad (5)$$

se kterou dojde k vybití kondenzátoru C_1 do kondenzátoru C_2 . Podle poměru C_2/C_1 se účinnost pohybuje mezi 0 a 100%, pro $C_1 = C_2$ je účinnost 50%.

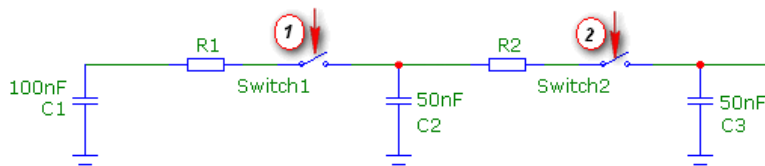
Vztah (4) ukazuje, že ztráty na odporu jsou jakousi „penalizací“ za celkový přenesený náboj. Je-li $C_2 \ll C_1$, do „malého“ C_2 se přelije malé množství náboje a poměrná ztráta na odporu je nepatrná, naopak při $C_2 \gg C_1$ se do „velkého“ C_2 přelévá podstatná část náboje a ztráty jsou také velké.

Porovnáním (2) a (5) dojdeme k závěru, že velikost napětí na nabitém kondenzátoru C_1 se změní po připojení nenabitého kondenzátoru C_2 h krát, kde h je účinnost přenosu energie z C_1 do C_2 .

4. Jak snížit ztráty na minimum?

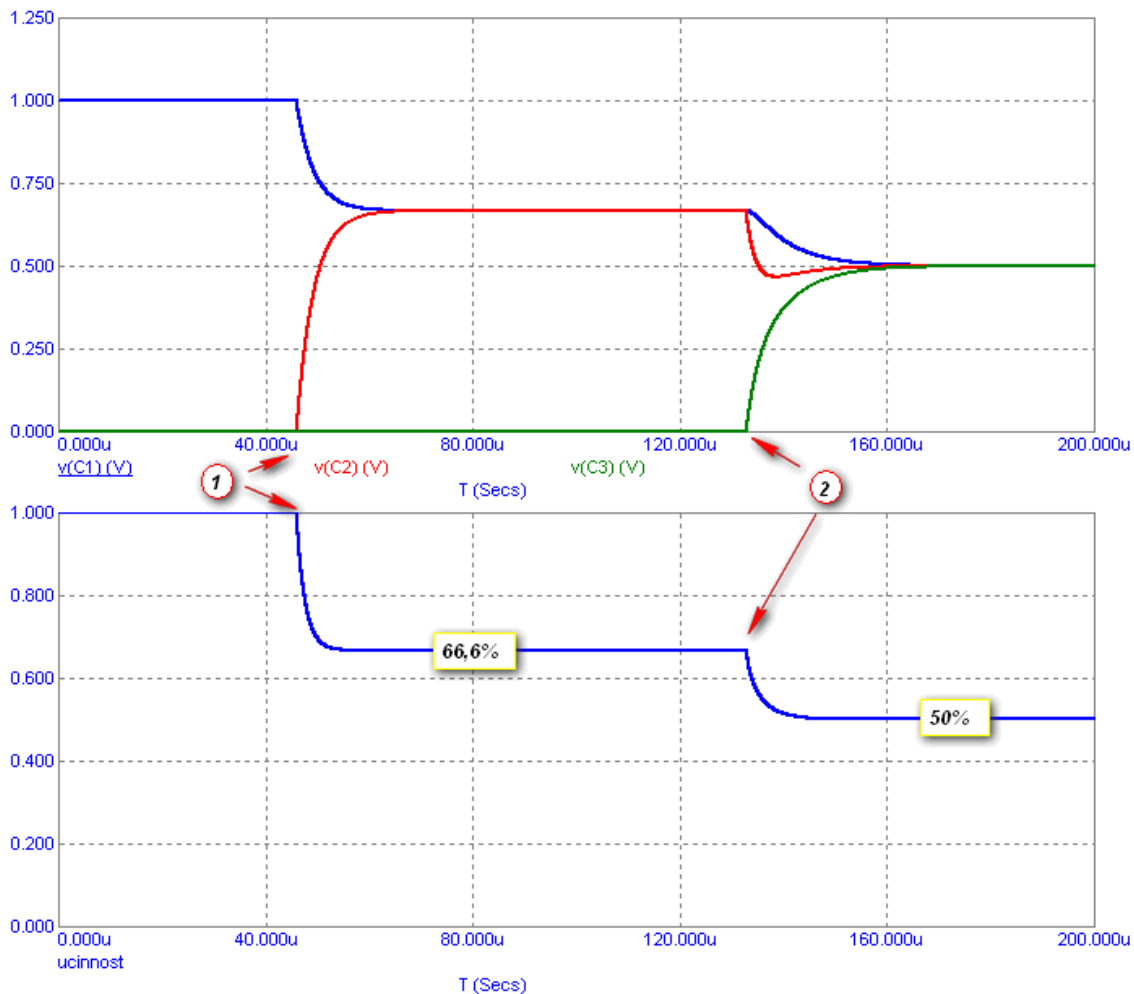
Ještě před několika lety nepředstavovaly výše uvedené konstrukce pro průměrného středoškoláka vážnější problém. Dnes je bohužel situace jiná – a to i přesto, že k dosažení výsledků (2) až (5) není potřeba žádné vyšší matematiky. Úsilí některých pedagogů o zachycení alespoň minimálního zájmu svých žáků o teorii obvodů se soustředí na metodu experimentu – ať už klasického nebo vytvořeného softwarovými prostředky, typicky pomocí simulačního programu.

Pochopí-li žák, že účinnost nabití „prázdného“ kondenzátoru přiloženého k nabitému kondenzátoru je tím vyšší, čím menší je kapacita nabíjeného kondenzátoru, pak je možno vyvolat v něm zvědavost následující úvahou: co kdybychom provedli místo jednorázového nabití jednoho kondenzátoru dvě po sobě jdoucí nabití dvou kondenzátorů o polovičních kapacitách tak, že až se nabije první, připojíme k němu paralelně druhý? Výsledek bude stejný jako v předchozím případě - nabitá paralelní kombinace dvou kondenzátorů poloviční kapacity – avšak nabití kondenzátoru o menší kapacitě se děje s vyšší účinností. Povede toto uspořádání k vyšší účinnosti nabíjení?



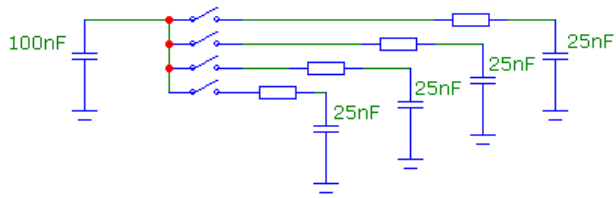
Obr. 3. Postupné vybíjení kondenzátoru C_1 do kondenzátorů C_2 a C_3 .

Těžko bychom mohli v dnešní době očekávat, že průměrný žák vyřeší tuto úlohu výpočtem. Pomocí počítačového experimentu se simulačním programem to však možné je. Na obr. 4 jsou výsledky simulace v programu Micro-Cap 9, které ukazují, že takto zvýšit účinnost přenosu náboje nelze. Nabití C_2 se uskuteční s účinností vyšší než 50%, protože $C_2 < C_1$. Po připojení C_3 však zjišťujeme, že konečná účinnost přenosu náboje je opět 50%.



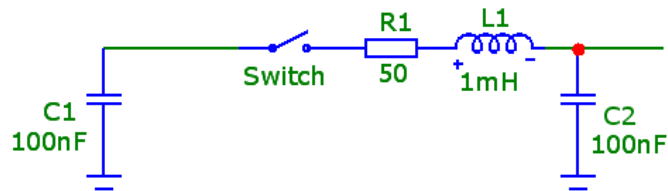
Obr. 4. Sledování účinnosti přenosu náboje z kondenzátoru C_1 do kondenzátorů C_2 a C_3 .

Co se stane, když počet takto paralelně připojovaných kondenzátorů zvětšujeme ze dvou na libovolný počet, přičemž zachováváme podmínku, aby součet jejich kapacit zůstal roven kapacitě kondenzátoru, ze kterého se soustava nabíjí? Je pozoruhodné, že účinnost nabití soustavy bude opět 50%, přičemž nezáleží na hodnotách rezistorů ani na časové posloupnosti, s jakou jsou jednotlivé kondenzátory připojovány do výsledné soustavy. Shodných výsledků dosáhneme i při jiných uspořádáních nabíjecí soustavy, z nichž jedna je představena na obr. 5.



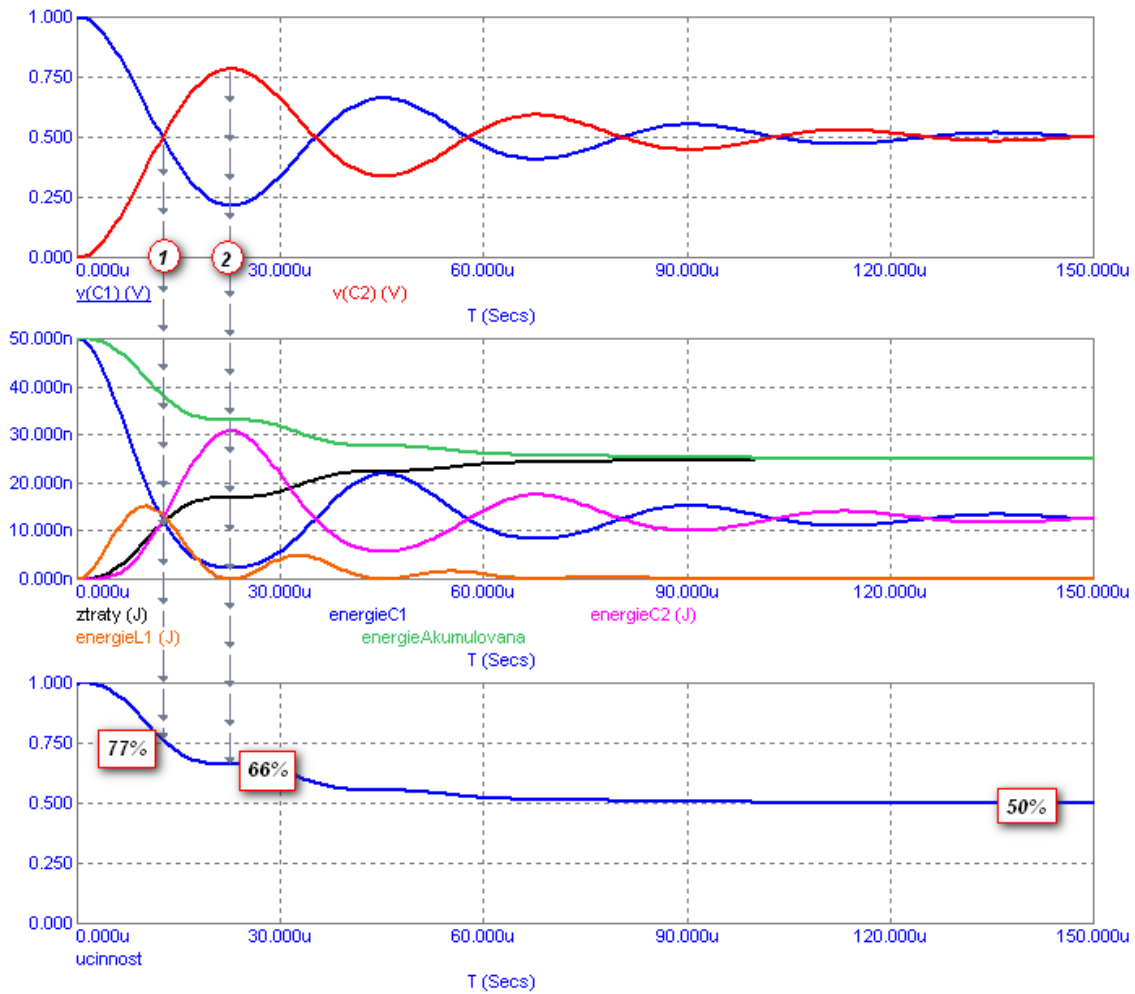
Obr. 5. Jiné uspořádání nabíjecí soustavy.

Vyzkoušíme ještě variantu podle obr.6, kde je k přenosu náboje využito indukčnosti.



Obr. 6. Vybíjení kondenzátoru C_1 přes indukčnost.

Výsledek analýzy v programu Micro-Cap 9 ukazuje obr. 7.



Obr. 7. Časový průběh vybíjení kondenzátoru C_1 přes indukčnost.

Po úplném odeznění přechodového děje je účinnost opět 50%, ovšem v jeho průběhu se na kondenzátoru C_2 přechodně objevuje větší napětí než na kondenzátoru C_1 . Dochází k tomu v těch časových intervalech, kdy energie magnetického pole cívky dosahuje lokálních minim, protože se právě přelévá do elektrostatického pole kondenzátoru C_2 . Z grafu je vidět, že kdybychom celý proces zastavili v okamžiku \bullet , oba kondenzátory by byly nabity na poloviční napětí s účinností 77%. V okamžiku \bullet je do kondenzátoru C_2 přečerpáno dokonce nadpoloviční množství původního náboje, a to s účinností 66%.

5. Širší souvislosti aneb nejde jen o elektrotechniku ..

Podle [4] má problém dvou kapacitorů své analogie i v jiných vědních oborech. V mechanice jsou to dvě nestejně stlačené a poté spojené pružiny, v hydrostatice je to spojení dvou nádob s rozdílnou výškou hladin, v dynamice je to problém dvou kolidujících těles. Vždy platí, že po spojení objektů energie soustavy klesne, část energie se „ztratí“. Obecné příčiny tohoto jevu udává tzv. Lacyho – McCabeův zákon ([4]):

Energie určitého druhu nemůže být přenesena beze ztrát do jiné části systému, aniž by prošla mezistupněm pro dočasnou přeměnu na jiný druh energie.

Energií určitého druhu se rozumí translační nebo rotační energie, elastická potenciální energie, energie elektrického a magnetického pole. Fungování zákona se dá vysvětlit na příkladu srážky dvou koulí. Pripustíme-li alespoň minimální elasticitu koulí a tím i dočasnou přeměnu kinetické energie na potenciální elastickou energii v okamžiku srážky, tato energie se neztratí, ale může být zpětně vydána oběma koulím ve formě nové kinetické energie. Podobně se nedá beze ztrát přelévat energie elektrického pole jednoho kondenzátoru do druhého přímo, avšak pomocí mezičláku – magnetického pole cívky – to možné je.

6. Závěr

Problém dvou kapacitorů může zajímavě obohatit výuku na středních i vysokých školách, a to zejména po vhodné didaktické transformaci s využitím klasického experimentu a počítačové simulace. Obecné zákonitosti formulované Lacyho – McCabeovým zákonem mohou představovat zajímavou učební látku a návrat „starých dobrých“ elektromechanických a jiných analogií do výukového procesu.

Animace a zdrojové soubory z výše uvedených simulací v programu Micro-Cap 9 nalezne zájemce na adrese <http://www.roznovskastredni.cz/biolek/articles/sto10.zip>.

Literatura

- [1] Powell, R. A. "Two capacitor problem: A more realistic view". *American Journal of Physics*, vol.47, No 5, Mai 1979, pp. 460-462.
- [2] Mita, K., Boufaida, M. "Ideal capacitor circuits and energy conservation". *American Journal of Physics*, vol.67, No 8, August 1999, pp. 737-739.
- [3] Boykin, T. B., Hite, D., Singh, N. "The two-capacitor problem with radiation". *American Journal of Physics*, vol.70, No 4, April 2002, pp. 415-420.
- [4] O'Connor, W. J. "The famous 'lost' energy when two capacitors are joined: a new law?". *Physics Education*, vol.32, March 1997, pp. 88-91.
- [5] Blahovec, A. "Základy elektrotechniky v příkladech a úlohách". SNTL, Praha 1989, pp. 89-90.
- [6] Hajach, T., Tuma, A., Šeliarová, E. "Základy elektrotechniky I pro 1. ročník SPŠ elektrotechnických". SNTL, Praha 1985, pp. 72.